现 代 常 微 分 方 程

周天寿，王其如，朱思铭

2014-06-09

内部使用

内容提要

本书是在原中山大学数学力学系常微分方程组编写《常微分方程讲义》1978 年初版、1983 年第二版、2006 年第三版基础上的新修订版，并改名为《现代常微分方程》. 考虑到几十年来科学技术的发展，在教学时数不增加的前提下本版做了较大修改，如缩减了常微分方程解法的内容，加强了常微分方程定性理论的内容，这主要考虑到描述实际问题的微分方程大多是高维、非线性等特点，因此一般无法给出分析解，而定性分析常常能给出轨线的基本性态. 尽管这样，本版仍尽可能保持了原书的基本内容和易学易教等特点.

全书共分为七章：第一章简要介绍现代常微分方程的主要内容、与微分方程有关的基本概念、若干常用的微分方程模型等；第二章介绍一阶常微分方程的四种求解方法：分离变量法、变量变换法、积分因子法、参数表示法；第三章介绍线性微分方程（包括线性微分方程组和高阶线性微分方程）的通解结构及其性质，此外还特别介绍常数变易法；第四章介绍线性微分方程（包括线性微分方程组和高阶线性微分方程）的分析解法，重点介绍常系数线性微分方程的若干解法；第五章介绍常微分方程的基本定理，包括解的存在唯一性定理、延拓定理、对初值依赖的连续性和可微性定理等. 此外，还介绍了求常微分方程数值解的两种简单方法；第六章简要介绍常微分方程系统的定性理论，包括定态局部稳定性分析、李亚谱洛夫（Lyapunov）函数分析定态稳定性方法、极限环的存在性及其稳定性分析等；第七章简要介绍常微分方程系统的分叉理论，重点介绍一维系统的分叉类型和标准型.

本书可作为综合性大学和师范院校数学专业、应用数学专业、概率统计专业、计算数学专业，以及师范专科学校数学系常微分方程课程的教材和各高校数学建模课程的参考资料.

编者说明

本书自 1978 年初版以来，经历了多次教学实践和几次修改且一直在重印中，说明本书的编写得到了广大读者的认可和肯定. 全书按教学大纲的要求，较全面地介绍了常微分方程的基本理论与方法，结构合理，逻辑清晰，讨论详尽，易学易教，有典型的例子和习题，在处理诸如高阶线性微分方程理论、线性微分方程组理论、非线性微分方程定性理论等方面有自己的特色.

随着常微分方程几十年的发展，已逐渐形成了一套较完善的理论与方法，构成现代常微分方程的主要内容. 本书从发展的观点，在教学大纲要求和不增加学时的前提下既介绍了传统微分方程的基本理论与基本方法（做到易学易教），又补充了适应微分方程课程发展要求的新理论与新方法（力争做到理论与应用兼顾），主要体现在介绍传统微分方程理论和方法与现代微分方程理论与方法之间的平衡，即传统常微分方程把求解方法作为主要内容，约占教学大纲要求的百分之七十的教学时间，而现代常微分方程主要从两方面入手：一是微分方程的可解性理论与方法（包括几类典型微分方程的求解方法）；二是微分方程的定性理论与分析方法（如在不可求解的前提下，如何定性地分析微分方程系统轨线的性态、系统参数变化时解的分岔情况等），基本上这两方面内容的介绍各占百分之四十的教学课时（其余百分之二十主要用于介绍常微分方程的基本概念、基本定理等）. 这种内容安排由实际问题所驱动，因为描述大多数实际问题的微分方程数学模型具有高维、高度非线性等特点，而实际能求解的微分方程的例子并不多，这促使人们基于微分方程本身的特点寻求了解系统轨线性态的其它途径或方法，而微分方程定性理论与方法一般能使我们了解微分方程系统某些轨线的性态，至少能使我们了解轨线的局部性态，例如定态局部稳定性分析能使我们了解在系统定态的某个邻域内轨线的定性行为. 当然，为了不增加

教学大纲所规定的课时时间，必然地要缩减传统微分方程理论与方法的介绍，如分析求解方法等，然而对于这些内容，只要具有较好的数学分析知识和线性代数学知识（如积分理论、矩阵理论等)，应该不会有太大困难，因为从过去的教学效果来看，学生对传统常微分方程的求解方法是较易掌握的.

这次修订版本在内容安排方面更多地考虑了简洁性、逻辑性、完整性和可读性，例如，为了介绍常微分方程的基本定理（主要是解的存在唯一性定理)，本书先考虑一阶常微分方程，然后考虑高阶常微分方程和常微分方程组，并且由于高阶线性微分方程与某个特定的线性微分方程组等价，因此主要介绍常微分方程组的基本定理. 在介绍常微分方程的解法时,先介绍一阶常微分方程的四种常用解法（包括变量分离法、常数变易法、积分因子法和参数表示法)，然后介绍高阶线性微分方程和线性微分方程组的解法. 由于高阶线性微分方程的一般理论（如通解结构、常数变易法等）能够作为线性微分方程组相应一般理论的推论，因此我们主要介绍线性微分方程组的一般理论和求解方法. 在介绍求解方法时,重点介绍常系数线性微分方程组的解法，包括如何计算基解矩阵、如何找非齐次方程组的特解，以及简要地介绍拉普拉斯变换法等. 而对高阶线性常微分方程,重点介绍常系数线性微分方程（包括齐次和非齐次方程）的解法，如特征根法、比较系数法和拉普拉斯法. 此外，我们还简要介绍了高阶非线性方程的两种解法：降阶法和幂级数解法. 在介绍常微分方程定性理论时,本书主要考虑两个方面的内容：一是运动稳定性理论（参数固定)；二是分岔理论（参数变动）. 由于常微分方程大致可分为两大类系统：一是稳态系统；二是极限环（周期轨）系统，因此研究这两大类系统的轨线性态（包括稳定性和分岔）已成为现代微分方程定性理论的核心内容. 本书在这方面内容的安排既考虑了学生的实际情况（一般为大二生)，又考虑了其以后发展的需要（如攻读硕士)，深入浅出地介绍了常微分方程的定性理论与分析方法. 例如，首先

介绍定态局部稳定性分析（主要考虑双曲型的微分方程系统，即定态处的线性化方法的雅可比矩阵具有非零实部的特征值），然后考虑临界情形（即定态处的线性化方法的雅可比矩阵具有零实部的特征值）的定态稳定性分析（如通过构造李雅普洛夫函数来确定定态的局部稳定性）; 在极限环情形，首先要解决极限环的存在性问题, 然后要解决其稳定性问题. 对于极限环的存在性, 我们介绍了几个常用判断极限环存在和不存在的定理. 对于极限环的稳定性分析，本质上可类似于定态情形的处理，即在极限环处作性化方程，得到雅可比矩阵是周期的线性化方程，然后考察线性系统的弗洛盖（Floquet）乘子的模并由此得出极限环的线性稳定性条件. 对于分岔理论，简要地介绍若干常见的分岔类型及相关系统的标准型（一维情形），但重点放在霍普夫（Hopf）分岔理论的介绍.

本书共分七章. 第一章对 2006 年版《常微分方程》的内容进行了较大修改，而且增加了某些新内容，如介绍了转录水平上基因调控网的建模方法与模型、列举出常见的常微分方程的数学模型，便于今后进一步学习与参考. 第二章基本保留了原版的内容, 但对原版的某些内容进行了归纳和压缩. 第三章把线性微分方程组和高阶线性方程的通解结构及其性质的内容放在一起讲述，因为它们有许多相似之处，这种处理的好处是可以帮助读者较系统地了解线性微分方程的通解性质. 第四章的内容基本是从原版内容经整理而来，但在内容安排方面有所不同，如先讲述常系数线性微分方程组的特征根法和求特解的待定系数法，然后讲述常系数高阶线性微分方程组的特征根法和求特解的待定系数法，本质上后者的大部分结果是前者的推论；第五章基本保留了原版内容，但对某些定理的证明进行了简化，便于阅读，特别是指出了常微分方程解的存在唯一性定理的几何意义，即假定存在唯一性定理的条件被满足，则在状态空间中任何两条轨线都不会相交. 第六章把运动稳定性理论单独来介绍, 在内容安排上与原版有较大不同, 特别是精炼了有关内容. 此外，补充介绍了极限环的存在性及稳定性分

析等方面的知识. 第七章介绍了微分方程系统分叉的基本概念、基础知识, 重点介绍一维系统的分叉理论与分析方法.

本书的修订得到了广大师生的大力支持与帮助, 特别是中山大学应用数学教研室长期从事为微分方程教学的若干人员, 如朱思铭、王寿松、赵育林、王远世、李艳会等老师的大力帮助, 他们提出了许多宝贵意见和建议, 对此我们表示衷心的感谢. 特别要感谢的是张家军博士对本书中涉及到的图的处理.

在常微分方程教材中引入现代科技发展的新概念、新内容和教学软件是一种新的尝试, 加上本次修订时间仓促, 肯定存在许多不足之处, 有关错漏与问题由修订者负责, 更希望得到兄弟院校广大师生的反馈意见, 在此预先表示谢意.

周天寿

2014 年 6 月

于中山大学数学与计算科学学院

目 录

第一章 绪论

首先，简要介绍本书内容安排的总体思路，以帮助读者了解什么是现代常微分方程；其次，介绍与微分方程有关的某些重要概念，然而对这些概念的深入理解，需要等到学习本书后面的内容；最后，介绍若干常见的常微分方程数学模型，包括建模时应注意的关键事项.

§1.1 什么是现代常微分方程

在数学分析课程[1]中，我们已经接触到微分方程的概念，例如，函数 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的关系为 $F'(x)=f(x)$，这实际是一个微分方程，可理解为已知一个函数的导函数 $f(x)$ 求未知函数 $F(x)$ 的表达式. 显然，根据牛顿-莱布尼茨公式，满足这种方程的 $F(x)$ 有无穷多，因为若 $F(x)$ 满足此微分方程，那么 $F(x)+c$ 也满足，其中 c 是任意常数；又例如，已知一条平面曲线 $y=f(x)$ 经过点 $(1,2)$ 且其斜率函数为 $k=2x$，求此曲线方程，这是一个求解微分方程的初值问题，即已知微分方程 $y'=2x$ 且满足条件 $y(1)=2$，求 $y=f(x)$（事实上，运用数学分析办法，不难求得此曲线方程为 $y=x^2+1$，此即为已知微分方程满足初始条件的解）.

上述问题的统一格式可归纳为：给定未知函数的导函数，求此未知函数. 这便是**微分方程**的含义，更一般的含义是指：已知自变量（可为多个）、未知函数（亦可为多个）和其导数（或微分）组成的代数关系式，其中未知函数可通过求解该微分方程而给出. 通常，把只有一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，它的一般形式为

$$F\left(x;y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \tag{1.1}$$

其中，$y^{(k)}=d^ky/dx^k$ 表示 y 关于 x 的 k 阶导数；F 是已知函数，且一定包含 $y^{(n)}$ 的项，n 称为微分方程的**阶**，因此方程（1.1）是 n 阶常微分方程；x 代表时间；y 代表描述事物变化的量. 自变量多于一个的微分方程称为**偏微分方**

程, 本书仅限于讨论常微分方程. 从上面的例子可看出常微分方程的求解问题本质上属于数学分析中积分学的范畴，然而，读者将看到常微分方程有其自己的理论体系，而且常微分方程理论已经发展成为现代数学的一个重要分支，特别是，现代常微分方程是解决许多实际问题的重要工具. 关于现代常微分方程，应该从以下几个方面来理解.

首先，在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中，存在大量的常微分方程类型的数学模型，需要通过研究（如求解、定性分析、分叉分析等）常微分方程来了解变量与变量之间的定量、定性关系以及解与系统参数之间的依赖关系. 特别是，客观事物是动态变化的，即刻画事物的量会随着时间的变化而变化，如电路中的电流、数学摆的相位、基因调控过程中蛋白质或 mRNA 的浓度、传染病模型中感染人数、生态模型中的种群数目、化学反应中物种分子数目或浓度等都是时间变化的函数，描述这种时间演化规律在数学上常常可归纳为常微分方程模型. 变量与变量之间的关系或法则（例如方程（1.1）中的F）由相关领域的基本原理、定理、定律、甚至假设等决定，例如刻画电流传输的基尔霍夫（Kirchhoff）定律、刻画生化反应物种分子运动的质量作用定律等. 然而，合理地建立常微分方程类型的数学模型既依赖于各应用领域的最新理论研究进展，也依赖于所关注问题的角度，但数学模型是解决有关问题的重要一步.

第二，对于一个常微分方程，其解的存在性是需要解决的基本问题. 对某些常微分方程，其解可以存在，亦可不存在，例如，$y'=\cos x$，则其解为$y=\sin x+c$（其中c是任意常数），意味着此常微分方程的解总是存在的，而且有无穷多解. 若要找此方程满足初始条件$y(0)=1$的解，则可求得$y=\sin x+1$，这种满足初始条件的解称为特解. 又如，微分方程$1+x^2+(y')^2=0$在实数范围内不存在任何解. 本书的第五章将重点解决常微分方程的解的存在唯一性问题. 需要指出的是，本书关于解的存在性的含义还包括解对初始值的依赖性（如连续性、可微性等），以及解的延拓等，相关问题也将在

第五章中给出一般性的理论结果．此外，当微分方程有无穷多个解时，解空间（即解的集合）的结构与性质也是个有趣的问题，第三章将讨论线性微分方程系统解的结构与性质，给出一般性结果．对于非线性微分方程，一般没有分析解.

第三，对于一个常微分方程，能够分析地找出其所有解当然是最理想的且是有意义的，这是因为此时我们对该系统能够知道其所有可能的信息（包括其过去和未来的变化规律）．第二章和第四章将分门别类地介绍几种类型常微分方程的若干求解方法，这些方法构成传统常微分方程的主要内容[2]．掌握微分方程的初等解法，特别是知道某些类型的微分方程解的结构与形式是基本和重要的,对于分析和理解微分方程解的特性具有帮助．需要指出的是：描述现实世界的大多数常微分方程是不可求解的（即没有分析解），例如相当简单的一阶常微分方程：$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$（也叫做里卡蒂（Riccati）方程），一般没有初等解法，即其解不能用初等函数表示.

第四，在常微分方程不能分析求解的情形下，我们还能够知道其解的性质（包括定量和定性方面的性质）吗？答案是肯定的，对此有两种途径：一是所谓的常微分方程定性理论；另一种是通过计算机来数值求解．本书第六章和第七章将简要地介绍常微分方程的定性理论和分叉知识，主要包括定态稳定性分析、极限环的存在性和稳定性、分岔理论等．通过应用常微分方程定性理论和分叉知识，一般能对特定常微分方程解的性质（如轨线性态和轨线对参数的依赖关系等）会有个大致的了解，而此时我们并不必要找出其分析解，例如，著名的 van der Pol 方程：$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$（这里参数$\mu > 0$）一般没有分析解，但可以证明，它存在极限环（即一种周期解）.

最后，刻画现实世界的许多常微分方程模型是非常复杂的，既不易找出其分析解，也不便对其进行理论分析，此时数值模拟便对了解微分方程系统的轨线性态提供了一条好的途径，事实上，由于大型计算机的发展，数值模拟已成为解决许多实际问题最有效的途径之一．对此，本书也将作简

要的介绍.

总之，现代常微分方程既包含了传统常微分方程的主要内容（主要是求解方法），又增添了新的内容（如常微分方程定性理论）. 正像微分方程本身的含义那样，微分方程模型和微分方程理论也会随着最新研究成果的出现而变得更加丰富.

§1.2　一阶常微分方程

本节将介绍一阶微分方程的基本概念. 只要具备数学分析的基础知识，读者都不难能理解和掌握本节的内容.

只含未知函数一阶导数的方程称为一阶微分方程，它的一般形式为:

$$F\left(x;y,y'\right)=0 \tag{1.2}$$

（也称为一阶隐式微分方程）其中x是自变量，y是x的函数，$y'=\dfrac{dy}{dx}$是未知函数的导数，函数F是三个变量的给定函数. 若函数F不是对自变量的所有值均有定义，此时需要考虑其**定义域**Ω，这里Ω是指三个变量x,y,y'的坐标空间中的点集，一般为区域. 当函数$y=\varphi(x)$在某个区间$a<x<b$（不排除$a=-\infty$，$b=+\infty$的情形）上有定义，且当$y=\varphi(x)$代入到方程（1.2）中的y，得到在整个区间$a<x<b$上的恒等式，就称$y=\varphi(x)$为方程（1.2）的解；而称区间$a<x<b$为解$y=\varphi(x)$的**存在区间**. 根据这些定义，我们知道函数$\varphi(x)$必须在整个区间$a<x<b$上具有一阶导数（特别是连续的），而且当变量x在区间$a<x<b$中取任意一值时，以$\left(x,\varphi(x),\varphi'(x)\right)$为坐标的点必须属于函数$F$的定义域$\Omega$.

一阶微分方程除上面的隐式形式外，还有下列显式形式：

$$y' = f(x; y) \tag{1.3}$$

为了利用几何直观地表示系统，引进变量 x 和 y 的坐标平面 P，其中 x 放在横坐标轴上，y 放在纵坐标轴上．确定微分方程（1.3）的函数 f 可能不是对所有的 x 和 y 的值都有定义，或用几何的语言来说，不是在整个平面 P 而是仅在 P 的某个集合 G 上有定义．一般地，我们假定 G 为开集；函数 f 本身及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 G 上连续．这样，在平面 P 上，方程（1.3）的解 $y=\varphi(x)$ 即表示一条几何曲线，在这条曲线上处处有切线存在，而且曲线完全落在区域 G 中．这种曲线称为方程（1.3）的**积分曲线**.

回忆起代数学中的代数基本定理，它完满地回答了 n 次多项式有多少个根的问题，即 n 次多项式正好有 n 个根（k 重根算 k 次）．类似地，微分方程存在多少个解的问题也是重要的理论问题，然而结果不同的是每个微分方程都存在无穷多个解，例如，前面提到的微分方程 $y' = \cos x$，就有无穷多个解 $y = \sin x + c$，其中 c 是任意常数．因此，对微分方程而言，关注的问题不是解的个数问题，而是如何描述给定微分方程所有解的集合及如何理解这些解的性质．一个更为关注的问题是微分方程的初值问题，即在区域 G 中给定一个点 (x_0, y_0)（称为初始条件或初值），过此点的积分曲线是否存在？若存在，是否唯一？下面的定理完满地回答了一阶常微分方程解的存在唯一性

问题.

定理 1.1【存在唯一性定理】 给定微分方程（1.3），假设函数 $f(x,y)$ 在平面上的某个开集 G 上有定义，并且 f 本身及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 G 上连续，那么对于 G 中任一给定的点 (x_0,y_0)，都存在方程（1.3）唯一解 $y=\varphi(x)$，它定义在 x_0 的某个范围内（如包含 x_0 的区间 (a_1,b_1)）且满足条件 $\varphi(x_0)=y_0$.

这一定理的证明将放在本书的第五章，而且在那里，我们将给出关于微分方程解的存在唯一性更精细的结果（包括弱化定理的条件、扩充解的存在区间等）. 定理 1.1 的几何含义是：对于开集 G 中的每一点 (x_0,y_0)，有且仅有方程（1.3）的一条积分曲线通过. 值得指出的是：除存在定义在某一区间 $a_1<x<b_1$ 上的解 $y=\varphi(x)$，还可能存在定义在另一个区间 $a_2<x<b_2$ 上的解 $y=\psi(x)$. 尽管两个区间 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 都包含 x_0，但解的唯一性只是说 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在它们公共的区间内恒等，并没有说 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的存在区间 $a_1<x<b_1$ 和 $a_2<x<b_2$ 是一样的.

若两个区间存在包含关系，例如 $a_2<x<b_2$ 完全包含了 $a_1<x<b_1$，那么就称定义在区间 $a_2<x<b_2$ 上的解 $y=\psi(x)$ 为定义在 $a_1<x<b_1$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 的**延拓**. 这时，我们自然地关注那些既不能向左又不能向右延拓的解，并称这种不可延拓的解为**饱和解**. 我们将证明（看第五章的内容）：每一个解都可用唯一的方式延拓成饱和解. 对于饱和解，解的唯一性可表述为：过每一点

(x_0,y_0)，都存在唯一的积分曲线经过.

从上面的分析，我们知道方程（1.3）的每一个解都对应于一条积分曲线，这是解的几何解释. 现在，我们给出方程（1.3）本身的几何解释. 过集合 G 中的每一点 (x,y)，引一条斜率为 $f(x,y)$ 的有向线段 $\ell_{x,y}$，这样得到对应于方程（1.3）的方向场（或向量场），这即是方程（1.3）的几何解释. 方程的几何解释与它的解的几何解释之间的联系是：任一积分曲线 $y=\varphi(x)$ 在它上的每一点 $(x,\varphi(x))$ 处均与向量场中的直线 $\ell_{x,y}$ 相切.

为了帮助读者理解上面的解的存在唯一性定理，考虑下列一阶微分方程：

$$y'=\alpha y\text{，（}\alpha\text{ 为实常数）}$$

显然，函数 $f(x,y)=\alpha y$ 定义在整个平面 P 上，且其本身及导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha$ 都在 P 上连续. 因此，根据定理 1.1，此方程一定存在解. 而且，通过直接验证，该方程的解可表示为 $y=ce^{\alpha x}$，其中 c 是任意常数. 由于这种解已经定义在 $-\infty<x<+\infty$ 上，因此是不可延拓的解或饱和解. 假设 $y=\varphi(x)$ 是此方程的任一解，那么我们可以选取适当的常数 c 使得 $\varphi(x)=ce^{\alpha x}$. 事实上，让 x_0 是解 $\varphi(x)$ 存在区间中的某一点，而且 $y_0=\varphi(x_0)$. 于是，若取 $c=x_0e^{-\alpha x_0}$，则此方程的解 $y=\varphi(x)$ 与 $y=ce^{\alpha x}=x_0e^{\alpha(x-x_0)}$ 满足相同的初值 (x_0,y_0). 由解的唯一性，它们是同一解，因此 $y=ce^{\alpha x}$ 给出了此方程所有解的一般形式（称为通解）.

§1.3　标准常微分方程

前一节，介绍了一个变量的一阶微分方程的某些概念，但是对于实际问题，当建立其微分方程类型的数学模型时，往往涉及高阶导数或多个变量，需要研究高阶微分方程或微分方程组. 本节介绍与这些微分方程有关的基础概念和知识，其中部分概念是一个变量微分方程情形的自然推广.

微分方程组

$$y_k' = F_k\left(x; y_1, y_2, \cdots, y_n\right), \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.4}$$

叫做**标准常微分方程组**，其中 x 是自变量；$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 x 的未知函数；导数是关于 x 求的；函数 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 是定义在 $n+1$ 维空间中某一开集合 G 上的 $n+1$ 个变量（即 $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$）的函数. 假定函数 $F_k\left(x; y_1, y_2, \cdots, y_n\right)$（其中 $k = 1, 2, \cdots, n$）在开集合 G 上是连续的，并假定偏导数

$$\frac{\partial F_k\left(x; y_1, y_2, \cdots, y_n\right)}{\partial y_j}, \quad k, j = 1, 2, \cdots, n$$

在 G 上也是连续的（这一条件将在第五章中被弱化）.

如果连续函数组

$$y_k = \varphi_k\left(x\right), \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.5}$$

在区间 $a < x < b$（不排除 $a = -\infty$，$b = +\infty$ 的情形）上有定义，且将它们替代方程（1.4）的 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 时，得到在整个区间 $a < x < b$ 上的恒等式，就称（1.5）为方程（1.4）的解，而称区间 $a < x < b$ 为此解的**存在区间**. 为了这种替代，

所有的函数$\varphi_k(x)$必须在整个区间$a<x<b$上具有一阶导数（特别是连续的），而且当变量x在区间$a<x<b$中取任意一值时，以$\left(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)\right)$为坐标的点必须属于函数$F$的定义域$G$.

现在，我们来叙述标准常微分方程组（1.4）的解的存在唯一性定理.

定理 1.2【存在唯一性定理】 假设标准方程组（1.4）中的右端各函数在某一开集G内有定义，这些函数本身及其关于y_k的偏导数在G内连续，那么对于G内的每一点

$$x_0,y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_n^{(0)}$$（称为**初值**）

存在方程组（1.4）定义在x_0的某一区间上的解

$$y_k=\varphi_k(x)\,,\quad k=1,2,\cdots,n$$

且满足初始条件

$$\varphi_k(x_0)=y_k^{(0)}\,,\quad k=1,2,\cdots,n$$

进一步，若方程组（1.4）有两个解

$$y_k=\varphi_k(x),y_k=\psi_k(x)\,,\quad k=1,2,\cdots,n$$

满足相同的初始条件

$$\varphi_k(x_0)=\psi_k(x_0)=y_k^{(0)}\,,\quad k=1,2,\cdots,n$$

并且每一解的存在区间均包含x_0，那么这两个解在它们的公共定义区间上处处相等或称这两个解在公共区间上重合.

这一定理的证明也将放在第五章中．定理的前半部分是关于解的存在性

的结论，后半部分是关于解的唯一性的结论．定理 1.2 是关于微分方程初始问题的解的结论，所得到的解称为**特解**.

然而，有时我们需要考虑微分方程的一般解．若微分方程（1.4）包含 n 个独立常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，即 $y_k=\varphi_k\left(x;c_1,c_2,\cdots,c_n\right)$（这里 $1\le k\le n$），则称其为**通解**，这里 n 个常数的独立性是指，对于 n 个函数 φ_k 关于 n 个常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的偏导数所组成的**雅可比**（Jacobi）**矩阵行列式**在某个区间（区域）内不为零，即

$$\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\right)}{D\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial c_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial c_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial c_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial c_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial c_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0$$

例如，考虑下列一阶微分方程组:

$$\boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

读者不难验证

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\varphi_1\left(x\right)\\ \varphi_2\left(x\right)\end{pmatrix}=e^{2x}\begin{pmatrix}c_1\cos x+c_2\sin x\\ -c_1\sin x+c_2\cos x\end{pmatrix}$$

是此方程组的解，其中 c_1 和 c_2 是任意常数．由于

$$\frac{D\left(\varphi_1,\varphi_2\right)}{D\left(c_1,c_2\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial c_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial c_2}\end{vmatrix}=e^{4x}\neq 0$$

因此， $\boldsymbol{y}=e^{2x}\begin{pmatrix} c_1\cos x+c_2\sin x \\ -c_1\sin x+c_2\cos x \end{pmatrix}$是此方程组的通解.

若标准方程组（1.4）中的函数$F_1,F_2,\cdots,F_n$都是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性函数，那么有下列形式的标准线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1'=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t) \\ x_2'=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t) \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

为方便，引进记号

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{A}(t)$称为方程组（1.6）的**系数矩阵**，向量$\boldsymbol{f}(t)$称为非齐次项. 若$\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{0}$，则称（1.6）为**齐次线性微分方程组**.

现在，介绍矩阵函数与向量函数的导数、积分等概念与性质. 一个$m\times n$阶的矩阵$\boldsymbol{A}(t)$或一个n维向量$\boldsymbol{x}(t)$在区间$a\le t\le b$上称为**连续**的，如果它的每个元素都是区间$a\le t\le b$上的连续函数. 一个$m\times n$阶的矩阵$\boldsymbol{A}(t)$或一个n维列向量$\boldsymbol{x}(t)$在区间$a\le t\le b$上称为**可微**的，如果它的每个元素都在$a\le t\le b$上可微，而且它们的导数分别为

$$\boldsymbol{A}'(t)=\begin{bmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \cdots & a'_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \cdots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1}(t) & a'_{m2}(t) & \cdots & a'_{mn}(t) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

其中所有的导数是关于t的.

不难证明，如果两个$n\times n$阶的矩阵$\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{B}(t)$，以及两个n维列向量$\boldsymbol{u}(t)$和$\boldsymbol{\upsilon}(t)$都是可微的，则下列等式成立

（1）$\left[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)\right]'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$，$\left[\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\upsilon}(t)\right]'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{\upsilon}'(t)$；

（2）$\left[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t)\right]'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}'(t)$；

（3）$\left[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)\right]'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$.

类似地，称矩阵$\boldsymbol{A}(t)$或向量$\boldsymbol{x}(t)$在区间$a\le t\le b$上为**可积**的，如果它的每个元素都在$a\le t\le b$上可积，且它们的积分分别由

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)dt=\begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(t)dt & \int_a^b a_{12}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)dt \\ \int_a^b a_{21}(t)dt & \int_a^b a_{22}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_a^b a_{n1}(t)dt & \int_a^b a_{n2}(t)dt & \cdots & \int_a^b a_{nn}(t)dt \end{bmatrix},\quad \int_a^b \boldsymbol{x}(t)dt=\begin{bmatrix} \int_a^b x_1(t)dt \\ \int_a^b x_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b x_n(t)dt \end{bmatrix}$$

给出.

矩阵函数与向量函数的有关概念与运算规则都是数量函数的有关概念与运算的自然推广.

若矩阵$\boldsymbol{A}(x)$不依赖于x（即$\boldsymbol{A}(x)$为常数矩阵，记为$\boldsymbol{A}$），则相应于方程（1.6）的方程

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x) \tag{1.7}$$

称为**常系数非齐次线性方程组**，特别是，若 $\boldsymbol{f}(x) \equiv \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{1.8}$$

则称为**常系数齐次线性微分方程组**. 齐次线性微分方程组和非齐次线性微分方程组是本书的主要研究对象之一.

注意到方程组（1.6）属于下列更一般微分方程的特殊情形

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{y}) \tag{1.9}$$

如果方程组（1.9）的右端函数不显含自变量 x，则称（1.9）为**自治系统**（或称系统（1.9）是自治的），而右端显含 x 的微分方程（1.9）称为**非自治系统**（或称系统（1.9）是非自治的）. 一般地，非自治系统可通过引进一个新变量而变成自治系统，例如方程组（1.9）通过引进 $t = x$ 可化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{F}(x;\boldsymbol{y}) \\ \dfrac{dt}{dx} = 1 \end{cases}$$

这时，原来的 n 维系统现在变成 $n+1$ 维系统. 然而，高维系统解的性质一般比低维系统解的性质要复杂得多.

显然，若所有的函数 $a_{ij}(x)$ 及函数 $f_k(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，则方程（1.6）满足定理 1.2 的条件，因此对任意的初值，均存在唯一解.

原理上，高阶微分方程可变成微分方程组. 例如，考虑 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = f\left(t; y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.10}$$

这里求导是关于变量t的；t是自变量；y是t的未知函数；$f\left(t; y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$是$n+1$个变量$t; y, y', \cdots, y^{(n-1)}$的给定函数，它定义在$n+1$空间的某个开集$G$内．假定函数$f\left(t; y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$本身及偏导数

$$\frac{\partial f\left(t; y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)}{\partial y^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

（在此令$y^{(0)} = y$）均在G内连续．为了变方程（1.10）为标准方程组，利用变换

$$x_1 = y, x_2 = y', \cdots, x_n = y^{(n-1)} \tag{1.11}$$

来引进变量t的新未知函数$x_1, x_2, \cdots, x_n$．于是，n阶微分方程（1.10）等价于下列微分方程组（关于等价，看下面的内容）

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f\left(t; x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \end{cases} \tag{1.12}$$

根据定理 1.2，对于集合G中的每一点$t_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$，存在方程（1.10）满足初始条件

$$\varphi^{(k)}\left(t_0\right) = y_0^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

的解$y = \varphi(t)$．换句话说，存在以

$$t_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

为初始值的解.

现在，我们来证明：方程（1.10）等价于方程（1.12）．假设函数y满足方程(1.10)，要证明由关系(1.11)所确定的函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足方程(1.12)．对引进新未知函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的关系式求导得

$$x_k' = y^{(k)}\text{，（}k=1,2,\cdots,n-1\text{），}\quad x_n' = y^{(n)}$$

根据关系(1.11)来替代上式中的前$n-1$个$y^{(k)}$，把函数y所满足的方程(1.10)来替代上式中的$y^{(n)}$，即得方程组（1.12）．反过来，假设函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足方程（1.12），并取$y=x_1$，我们来证明函数y满足方程（1.10）．事实上，在方程(1.12)的第一式中令$x_1=y$，得$x_2=y'$；在第二式中令$x_2=y'$，得$x_3=y''$；以此类推，我们就能导出方程式（1.11）．最后，在方程（1.12）中的最后一式中，根据关系式（1.11）改变每个函数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，就得到关于y的方程（1.10）．

因为函数f在集合G上有定义，因此方程组（1.12）的右端在按公式（1.11)进行坐标变换的条件下在集合G上也有定义. 在G上，方程组(1.12)满足定理 1.2 的条件，因此，可以在G上任意选取初始值$t_0,x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots x_n^{(0)}$，根据变换（1.11），这些初始值变为方程（1.10）的初始值$t_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)}$.

如果方程（1.10）的左端是y及$y', y'',\cdots, y^{(n-1)}$的线性函数（但系数可以是$x$的非线性函数），即

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1.13}$$

则称（1.13）为 n 阶**非齐次线性微分方程**，这里 $a_1(x),\cdots,a_n(x)$ 和 $f(x)$ 都是 x 的已知函数. 若（1.13）中的 $f(x)\equiv 0$，即

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \tag{1.14}$$

则称（1.14）为 n 阶**齐次线性微分方程，**并且通常把方程（1.14）叫做对应于方程（1.3）的齐次线性微分方程. 这两类高阶方程也是本书的主要研究对象之一.

在本节的最后，我们介绍相空间、轨线、零倾线与定态等概念。对于方程组（假定其维数大于 1，自变量为时间），仅由未知函数组成的空间称为**相空间**. 积分曲线在相空间的投影称为**轨线**，在相空间中绘制的轨线称为**轨线相图**，参考图 1.1（a）中的实圆，这里未知变量随时间的变化决定了轨线的走向，其依赖关系为时间序列，参考图 1.1（b）. 对自治系统 $d\boldsymbol{y}/dt=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$，代数方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})=0$ 所确定的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*$ 表示相空间中的点，它满足此方程，故称为**定常解**或定态或不动点（即不依赖于时间变化的解），参考图 1.1（a）的小实圆.

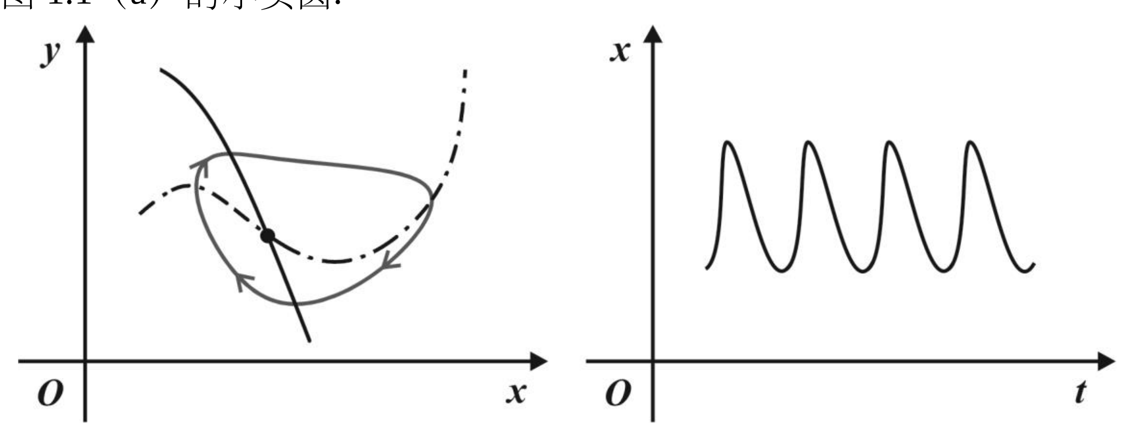


图 1.1 轨线、不动点、零倾线的示意图. 在（a）中，点虚线表示$x-$零倾线而实线表示$y-$零倾线，带有箭头的封闭曲线表示轨线（其中箭头表示轨线的时间演化方向），小的实圆表示定态或不动点；图（b）表示分量x的时间演化序列.

对于下列平面自治微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \tag{1.15}$$

其相空间(x,y)又称为**相平面**. 积分曲线有特殊的性质：时间轴t的平移不影响方向场，即可以在(x,y,t)空间中将方程的积分曲线投影到(x,y)平面上，则（1.15）变成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \text{或} \frac{dx}{dy} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

其在Oxy平面上的积分曲线即为方程组（1.15）的相轨线，这样方程组（1.15）的方向场可直接在相平面上进行讨论.

应用等倾斜线方法可以确定轨线的走向，其中相平面上满足$f(x,y)=0$的曲线表示轨线在x方向不改变，故称为**垂直等倾斜线**或$x-$零倾线，即轨线的切线垂直于x坐标轴；类似地，$g(x,y)=0$的曲线称为**水平等倾斜线**或$y-$零倾线，即轨线的切线平行于x坐标轴. $x-$零倾线或$y-$零倾线统称为零倾线，参考图 1.1（a）中的实线和点虚线. $x-$零倾线和$y-$零倾线的交点(x_0,y_0)

显然是方程组（1.15）的解，即方程组有定常解 $x(t)\equiv x_0$， $y(t)\equiv y_0$，这种定常解又称为**奇点**. 此外，关于轨线的走向，可通过 $x-$零倾线与 $y-$零倾线在相平面上划分的区域来确定，详细的讨论将放在本书的其它章节中.

§1.4　复值函数与复值解

直到现在，我们只讨论了实值微分方程及其实解. 然而，在某些情况下，例如当求常系数线性微分方程的解时（看第四章的内容），先找出实微分方程的复值解，然后再求出它的实解. 为了讲述这一过程，需要引进实变量的复值函数、复微分、复值解的概念.

设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是区间 (a,b) 上的实值函数， $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位，则称 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 为区间 (a,b) 上的**复值函数**，其中 $\varphi(t)$ 称为其实部，$\psi(t)$ 称为其虚部. 如果实函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a,b) 上连续，就称复值函数 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 在区间 (a,b) 上连续. 如果实函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a,b) 上可微，就称复值函数 $z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ 在区间 (a,b) 上可微，并且定义 $z(t)$ 的导数如下：

$$\frac{dz(t)}{dt}\equiv\frac{d\varphi(t)}{dt}+i\frac{d\psi(t)}{dt}$$

读者不能证明：如果两个复值函数 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 可微，c 是复值常数，那么

$$\frac{d\left[z_1(t)\pm z_2(t)\right]}{dt}=\frac{dz_1(t)}{dt}\pm\frac{dz_2(t)}{dt},\qquad \frac{d\left[cz_1(t)\right]}{dt}=c\frac{dz_1(t)}{dt},$$

$$\frac{d\left[z_1(t)z_2(t)\right]}{dt}=\frac{dz_1(t)}{dt}z_2(t)+z_1(t)\frac{dz_2(t)}{dt}.$$

这样，实值函数的有关导数运算规则可直接推广到复值函数的情形.

设$K=\alpha+i\beta$为任一复数，这里α、β为实数，t为实变量，则定义复指数函数为

$$e^{Kt}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t).$$

记复数$K=\alpha+i\beta$的共轭复数为$\bar{K}=\alpha-i\beta$，则利用定义直接验证可得复指数函数的如下性质(K、K_1、K_2为复数):

$$\cos\beta t=\frac{1}{2}(e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}),\quad \sin\beta t=\frac{1}{2i}(e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}),\qquad \text{（欧拉公式）}$$

$$e^{\overline{K t}}=\overline{e^{Kt}},\quad e^{(K_1+K_2)t}=e^{K_1t}\cdot e^{K_2t},\quad \frac{de^{Kt}}{dt}=Ke^{Kt},\quad \frac{d^ne^{Kt}}{dt^n}=K^ne^{Kt}.$$

若把复值函数$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$（其中$t\in(a,b)$）代人到实微分方程（1.14）（即所有的系数函数$a_k(x)$为实函数）后使方程（1.14）两边当$t\in(a,b)$时成为恒等式，则称$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$为方程（1.14）的**复值解**.

读者不难证明：若$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$是实微分方程（1.14）的复值解，则实部$\varphi(t)$和虚部$\psi(t)$也是此方程的解. 类似地,若$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$是实微分方程（1.13）的复值解，则实部$\varphi(t)$是方程（1.13）的解，而虚部$\psi(t)$是方程（1.14）的解（看本章的习题 2）.

§1.5 关于数学建模

一般地,常微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的动态变化关系. 构建常微分方程模型主要有下列两种方法：一种是基于自然规律、法则、定律、甚至假设等的数学建模，如从物理学、力学、化学、生物学等领域的基本原理出发，考虑主要因素，忽略次要因素，提炼出状态变量，并构造自变量、未知函数及其导数所满足的关系式（如（1.1）等)，由此建立起常微分方程模型，这种建模方法是最常用的；另一种是基于数据分析的系统重构，即通过数学方法去分析实验（或观察）数据之间的相互依赖关系，并加上合理的逻辑推理和应用相关领域的背景知识，重构系统，由此建立常微分方程模型. 这种建模方法在提升实验观察为理论结论时经常使用，如从生物实验数据上升到理论模型就经常采用这种建模手段. 下面，我们将针对第一种建模方法，简单地介绍若干领域中某些常见的常微分方程模型，并指出建模时的关键变量、所用的原理或假设.

例 1.1 一阶常微分方程模型：数学摆

一阶微分方程是最简单的微分方程。为了建立一阶微分方程模型，这里考虑一个简单的例子。数学摆是系于一根长度为l的线上而质量为m的质点M，在重力作用下，它在垂直于地面上沿圆弧运动，如图 1.2 所示. 现在来建立其运动方程.

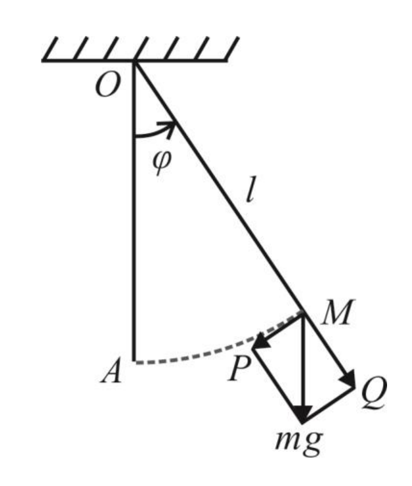


图 1.2 数学摆

取反时针运动的方向作为数学摆与铅垂线所成的角φ的正方向，则质点M沿圆弧的切线速度υ可表示成$\upsilon = l\varphi'$．作用于质点M的重力mg将摆拉回到平衡位置 A．把重力分解为两个分量：一个是沿半径OM方向的$\overrightarrow{MQ}$，它与线的拉力相抵消，从而对质点M的速度不会有贡献（即不会改变速度的值）；另一个是沿圆周切线方向的$\overrightarrow{MP}$，它能引起质点M的速度的改变．因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点M向着平衡位置 A 的方向运动，即当角φ为正时，向φ的减少方向运动；当角φ为负时，向φ的增大方向运动，所以$\overrightarrow{MP}$的数值等于$-mg\sin\varphi$．因此，摆的运动方程为$m\upsilon' = -mg\sin\varphi$，把$\upsilon$的表达式代人即得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.16}$$

这是一个二阶非线性微分方程，其中g和ℓ是系统的参数．若仅考虑摆的微小振动，即当φ比较小时，则可用φ近似代替$\sin\varphi$，此时，数学摆的运动方程变成

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\varphi=0 \tag{1.17}$$

若沿摆的运动方向存在一个与速度υ成比例的阻力，并设阻力系数为μ，则数学摆的运动方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{\ell}\varphi=0 \tag{1.18}$$

若沿摆的运动方向还存在一个外力$F(t)$（也称为强迫力），则摆的运动方程应修正为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{\ell}\varphi=\frac{1}{m\ell}F(t) \tag{1.19}$$

为了确定数学摆的一个特定运动，需要附加初始状态，例如当$t=0$时，

$$\varphi=\varphi_0,\ \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.20}$$

这里φ_0代表摆的初始位置，ω_0表示摆的初始角速度.

建模的关键变量是相位，所用的原理是力的分解与平衡及牛顿第二定律.

例 1.2 平面系统或一阶常微分方程组：生态模型

这里，仅考虑两个种群相互竞争（捕食与被捕食种群）的情形[4]. 为理解起见，考虑某海港里的鱼数目的变化规律. 假设所有的鱼被分成两类：被食鱼与捕食鱼，且假定被食鱼所需的食物很丰富，它们本身的竞争并不激烈. 设t时刻被食鱼的总数为$x(t)$，而捕食鱼的总数为$y(t)$. 如果不存在捕食

鱼，那么被食鱼的增加应遵循指数增长率 $x' = ax$（这里 $a > 0$ 为常数，表示自然净增长率），但如果捕食鱼存在，则致使被食鱼增长率降低. 设单位时间内捕食鱼与被食鱼相遇的次数为 bxy（这里 $b > 0$ 为常数），那么应有

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \tag{1.21}$$

另一方面，意大利数学家沃特拉（Volterra）认为捕食鱼的自然减少率（如因缺少被食鱼）同它们存在数目 y 成正比，即为 $-cy$（这里 $c > 0$ 为常数），而自然增长率则同它们本身的存在数目 y 及被食鱼的数目 x 的乘积成正比，即 dxy（这里 $d > 0$ 为常数，反映被食鱼对捕食鱼的供养能力）. 于是得到所谓的 Volterra 被捕食-捕食模型（或简称为 Volterra 模型）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(c + dx) \end{cases} \tag{1.22}$$

这一微分方程刻画不存在人类捕鱼活动时，捕食鱼与被食鱼应遵循的规律.

方程（1.22）称为捕食方程，更一般的捕食方程可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x, y)x \\ \dfrac{dy}{dt} = N(x, y)y \end{cases} \tag{1.23}$$

这里 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 分别表示相对于 x 和 y 的增长率，且当一种群增加时另一种群的增长率下降；任一种群过多时两种群都不能增长；只有一种群时，将按极限增长.

建模的关键变量是各种群的数目，所用的原理是种群变化率等于单位时间内种群增长数目减去种群消失的数目.

例 1.3 布鲁塞尔振子：化学系统

布鲁塞尔振子（Brusselator）是一个开放的化学系统[3]，它包含下列 4 个反应式

$$(1)\ A \xrightarrow{k_1} x, \qquad (2)\ B + x \xrightarrow{k_2} y + D$$
$$(3)\ 2x + y \xrightarrow{k_3} 3x, \qquad (4)\ x \xrightarrow{k_4} E$$

这里 A 和 B 表示反应物，D 和 E 表示产物，x 和 y 表示中间产物，k_i（$i=1,2,3,4$）是反应比率常数. 假定反应过程是恒定和均匀的，反应物是已知的. 若不引起混乱的话，仍用反应式中的符号代表相应物种分子的浓度. 感兴趣的问题是：中间产物的浓度是如何随时间变化的，而不考虑反应物和产物的时间变化. 用 Δ_x 和 Δ_y 分别表示物种 x 和 y 改变的数目（注：对于不同的反应，Δ_x 或 Δ_y 的值可以不一样. 正数表示物种分子的数目增加；负数表示减少；零表示不变）. 为了建立相关的微分方程模型，我们列出下列表格（注：转移率表示单位时间内物种分子的转移速率）.

表 1.1 两个物种分子改变的数目及相关转移率.

反应序号	物种分子改变的数目		转移率
	Δ_x	Δ_y	
（1）	+1	0	k_1A
(2)	-1	+1	k_2xB
(3)	+1	-1	k_3yx^2
(4)	-1	0	k_2x

基于表 1.1 及质量作用定律，可知物种 x 的浓度变化的微分方程为

$$\frac{dx}{dt}=(1,-1,1,-1)\begin{pmatrix}k_1A\\k_2xB\\k_3yx^2\\k_4x\end{pmatrix}=k_1A-(k_2B+k_4)x+k_3x^2y$$

类似地，可导出物种 y 的浓度变化所满足的方程．于是，获得下列平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k_1A-(k_2B+k_4)x+k_3x^2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=k_2Bx-k_3x^2y\end{cases}\tag{1.24}$$

通过对时间引进尺度变换（假定 $k_3=k_4$），最后能获得下列标准形式的常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\mu-(a+1)x+x^2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=ax-x^2y\end{cases}\tag{1.25}$$

这里 a 和 μ 是正数，它们作为系统的参数．微分方程（1.25）即是著名的布鲁塞尔振子模型（注：尽管这一模型没有分析解，但可以证明其拥有一个极限环或周期解，故叫做振子）．

建模的关键变量是物种分子的浓度，所用的原理是质量作用定律．

例 1.4* 基因调控模型[6]：生物系统

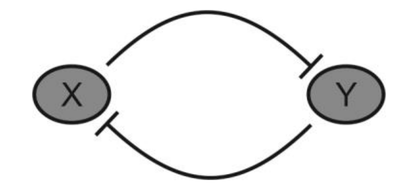


图 1.3 基因切换系统的调控网络示意图．

基因调控是个复杂的生化过程，涉及转录、翻译、传输、结合、降解等基本国策，基因调控关系主要有两种：促进和抑制．考虑转录水平上的基因切换系统，它由两个基因（用 x 和 y 表示）组成，基因的产物（即蛋白质）记为 X 和 Y，每个基因假定有一个操作位点，记为 D^I（这里 $I=X,Y$），而且，作为压制子，蛋白质 X 和 Y 分别以多聚体 X_m 和 Y_n（作为转录因子）的形式压制对方基因 y 和 x 的转录，这样形成一个负反馈圈，其调控网络如图 1.3 所示．假如仍用 X 和 Y 表示压制蛋白，并用 X_n 和 Y_n 分别表示 X 和 Y 的 n 聚物．根据生物学原理，我们能够列出相关的生化反应方程（看表 1.2），它们能够分成两大类：快和慢反应（注：蛋白质多聚化、转录因子与基因操作区域的位点相结合等反应一般以秒为阶，而 DNA 的转录、蛋白质的合成、反应物种的降解等反应一般以分钟为阶）．而且，启动子满足保守性条件：$D_{tot}^X=D^X+D_Y^X$, $D_{tot}^Y=D^Y+D_X^Y$（这里及以下，假定所有有关符号代表相应物种分子的浓度），其中 D_{tot}^X, D_{tot}^Y 是常数，表示操作位点的总浓度.

表 1.2 基因切换系统的生化反应式，表中 K_I,t_J,e_J,d_J（$I=1,2,3,4,X,Y,\ J=X,Y$）为反应比率常数.

快 反 应	慢 反 应
$mX\xleftrightarrow{K_1}X_m$（多聚化）	$D^X\xrightarrow{K_X}D^X+mRNA_X$（转录）
$nY\xleftrightarrow{K_2}Y_n$（多聚化）	$D^Y\xrightarrow{K_Y}D^Y+mRNA_Y$（转录）
$X_m+D^Y\xleftrightarrow{K_3}D_X^Y$（结合）	$mRNA_I\xrightarrow{t_I}mRNA_I+I,(I=X,Y)$（翻译）
$Y_n+D^X\xleftrightarrow{K_4}D_Y^X$（结合）	$mRNA_I\xrightarrow{e_I}\varnothing,(I=X,Y)$（降解）
	$I\xrightarrow{d_I}\varnothing,(I=X,Y)$（降解）

对于快反应，采用拟平衡近似，则获得 $X_m = K_1 X^m$， $Y_n = K_2 Y^n$， $D_X^Y = K_3 X_m D^Y$， $D_Y^X = K_4 Y_n D^X$. 进一步，结合启动子的保守性条件，可求得 $D^X = D_{tot}^X / \left(1 + K_2 K_4 Y^n\right)$， $D^Y = D_{tot}^Y / \left(1 + K_1 K_3 X^m\right)$. 质量作用定律导致

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = t_X mRNA_X - d_X X \\ \dfrac{dY}{dt} = t_Y mRNA_Y - d_Y Y \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dmRNA_X}{dt} = K_X D^X - e_X mRNA_X \\ \dfrac{dmRNA_Y}{dt} = K_Y D^Y - e_Y mRNA_Y \end{cases}$$

假定在基因调控过程中，$mRNA$ 的浓度保持不变，则有

$$mRNA_X = \frac{K_X}{e_X} \frac{D_{tot}^X}{1 + K_2 K_4 X^m}, \; mRNA_Y = \frac{K_Y}{e_Y} \frac{D_{tot}^Y}{1 + K_1 K_3 X^m}$$

由此可获得下列微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{t_X K_X}{e_X} \dfrac{D_{tot}^X}{1 + K_2 K_4 Y^n} - d_X X \\ \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{t_Y K_Y}{e_Y} \dfrac{D_{tot}^Y}{1 + K_1 K_3 X^m} - d_Y Y \end{cases} \tag{1.26}$$

通过对变量引进尺度变换，在适当的假设条件下不难把方程（1.26）变成下列标准形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\alpha}{1 + \upsilon^n} - u \\ \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{\beta}{1 + u^m} - \upsilon \end{cases} \tag{1.27}$$

这里 α, β 是常数，这就是常用的基因切换系统的数学模型. 一般地， $n = 2$.

假如仅考虑转录水平上的调控，那么对于 n 个基因的调控网络系统，其一般的数学模型为:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_i}{dt} = -a_i m_i + f_i\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -b_i p_i + c_i m_i \end{cases} \tag{1.28}$$

这里$i=1,2,\cdots,n$，m表示$mRNA$的浓度，p表示蛋白质的浓度，函数f_i代表第i个基因的输入函数（一般为非线性函数）[6]，常数a和b分别代表$mRNA$和蛋白质的降解率，c代表蛋白质的合成率.

建模的关键变量是 mRNA 和蛋白质的浓度，所用的原理是质量作用定律.

在本节的最后，我们指出：对于实际问题，建立其合理的微分方程类型的数学模型是一项极其复杂且困难的课题，涉及的知识面非常广．因此，建议读者平时多看课外书籍，努力提高自己的科学知识水平，不断扩充自己的知识面．只有这样，建模时才能得心应手.

§1.6　常用的常微分方程模型

这里，我们列出某些常用的微分方程模型（所涉及的导数是关于变量t的），为的是以后使用的方便或便于查阅，并希望读者能记住这些常微分方程模型.

1. Logistic 模型

$$x' = \mu x(1-x)$$

这里$\mu > 0$是系统参数.

2. 单摆模型

$$\varphi'' + \mu \sin\varphi = 0$$

这里$\mu > 0$是系统参数.

3. Brusselator

$$\begin{cases} x' = \mu - (a+1)x + x^2 y \\ y' = ax - x^2 y \end{cases}$$

这里$a > 0$和$\mu > 0$是系统参数.

4. Lorenz 系统[7]

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - xz - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

这里$a > 0$， $b > 0$和$c > 0$是系统参数.

5. Rossler 系统

$$\begin{cases} x' = -(y + z) \\ y' = x + ay \\ z' = z(x - c) + b \end{cases}$$

这里$a > 0$， $b > 0$和$c > 0$是系统参数.

6. Chen 系统[7]

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = (c - a)x - xz + y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

这里$a > 0$， $b > 0$和$c > 0$是系统参数.

7. Lienard 方程

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \text{ 或 } \begin{cases} x' = y \\ y' = -g(x) - f(x)y \end{cases}$$

8. van der Pol 方程

$$x'' + \mu\left(x^2 - 1\right)x' + x = 0$$

这里$\mu > 0$是系统参数.

9. Duffing 振子

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - cy - bx^3 \end{cases}$$

这里b和c是系统参数.

10.Stuart-Landau 模型

$$\begin{cases} x' = x - c_0 y - \left(x^2 + y^2\right)\left(x - c_2 y\right) \\ y' = y + c_0 x - \left(x^2 + y^2\right)\left(y + c_2 x\right) \end{cases}$$

这里c_0和c_2是系统参数.

11.FitzHugh-Nagumo（FHN）模型

$$\begin{cases} \varepsilon x' = x - (1/3)x^3 - y \\ y' = x + a \end{cases}$$

这里$0 < \varepsilon \ll 1$（小的数）和a是系统参数.

12.Oregonator

$$
\begin{cases}
\varepsilon x' = x(1-x) - \gamma y \dfrac{x-\mu}{x+\mu} \\
y' = x - y
\end{cases}
$$

这里$0<\varepsilon \ll 1$， $0<\gamma<\infty$， 和$0<\mu<1$是系统参数.

13.基因切换系统[6]

$$
\begin{cases}
u' = \dfrac{\alpha}{1+\upsilon^{n}} - u \\
\upsilon' = \dfrac{\beta}{1+u^{m}} - \upsilon
\end{cases}
$$

这里$\alpha>0$和$\beta>0$是系统参数， m和n一般为正整数.

14.Repressilator[6]

$$
\begin{cases}
m_i' = -m_i + \dfrac{\alpha}{1+p_j^{n}} + \alpha_0 \\
p_i' = -\beta\left(p_i - m_i\right)
\end{cases}
\quad
\begin{pmatrix}
i = lacI, tetR, cI \\
j = cI, lacI, tetR
\end{pmatrix}
$$

这里$\alpha>0$， $\alpha_0>0$和$\beta>0$是系统参数， n一般为正整数.

15.种群模型

$$
\begin{cases}
x' = M\left(x,y\right)x \\
y' = N\left(x,y\right)y
\end{cases}
$$

这里函数$M\left(x,y\right)$和$N\left(x,y\right)$一般为x和y的多项式.

16.Hamilton 系统

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{p}' = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \\
\boldsymbol{q}' = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}
\end{cases}
$$

这里 $\boldsymbol{p}=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$和$\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]$， H 是 Hamilton 函数或能量函数.

17.Kuramoto 模型

$$\theta_i'=\omega_i+\frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j-\theta_i\right),\quad 1\le i\le N$$

这里$\omega_i>0$（频率）和$K>0$（耦合强度）是系统参数.

18.退化 Josephson 结的数学模型

$$\begin{cases}\varphi_1'=-\sin\varphi_1+K\left(\varphi_2-\varphi_1+I\right)\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_i'=-\sin\varphi_i+K\left(\varphi_{i-1}-2\varphi_i+\varphi_{i+1}\right)\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_n'=-\sin\varphi_n+K\left(\varphi_{n-1}-\varphi_n\right)\end{cases}$$

这里$K>0$和$I\ge 0$是系统参数.

第一章 习题

1. 试证实: 若$K_1K_3d_X=K_2K_4d_Y$, 则微分方程（1.26）可变形为微分方程（1.27）.
2. 若$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$是实微分方程（1.14）的复值解, 则实部$\varphi(t)$和虚部$\psi(t)$也是此方程的解. 类似地，若$z(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$是实微分方程（1.13）的复值解，则实部$\varphi(t)$是方程（1.13）的解，而虚部$\psi(t)$是方程（1.14）的解.
3. 已知平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+4y+xy\\ \dfrac{dy}{dt}=-1+x-y\end{cases}$$

（1）试求它的定态解；

（2）试在相平面上画出系统的两条零倾线.

4. 已知微分方程：$x'' + \omega^2 x = 0$，这里导数是关于变量t的，$\omega > 0$是常数，

（1）试检验$x = A\sin(\omega t + \varphi)$（$A, \varphi$为任意常数）是方程的通解；

（2）证明这一方程的所有解均是有界的；

（3）证明它与微分方程组$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 x \end{cases}$是等价的.

5. 试求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

的通解，并求满足初始条件$y(0) = 1$的特解.

6. 对于二阶线性方程：$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$，这里函数$P(t)$和$Q(t)$都是连续的，试证明：

（1）若$x_1(t)$和$x_2(t)$是两个任意解，则它们的线性组合也是解；

（2）此方程的所有解组成一个向量空间.

7. 试建立满足已知条件的微分方程：

（1）平面曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定常；

（2）平面曲线上任一点的切线与两坐标轴所围城的三角形的面积等于常数；

（3）平面曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等

差中项;

（4）平面曲线上任一点的切线的斜率与切点的横坐标成正比.

8. 考虑具有两个中间产物的化学反应系统:

$$A+x\xrightarrow{k_1}2x$$
$$x+y\xrightarrow{k_2}2y$$
$$y\xrightarrow{k_3}E$$

这里A和E分别是已知的反应物和产物,试建立中间产物浓度关于时间演化的微分方程.

参考文献

[1] 邓东皋，尹小玲. 数学分析简明教程. 北京：高等教育出版社，2006.

[2] 王高雄，周之铭，朱思铭，王寿松. 常微分方程. 北京：高等教育出版社，2007.

[3] 朱思铭，李尚廉. 数学模型. 广州：中山大学出版社，1995.

[4] 姜启源，谢金星，叶菌. 数学模型. 北京：高等教育出版社，2003.

[5] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 北京：科学出版社，1991.

[6] 周天寿. 生物系统的随机动力学. 北京：科学出版社，2009.

[7] 陈关荣，吕金虎. Lorenz 系统族的动力学—分析、控制与同步. 北京：科学出版社，2005.

[8] 陈式刚. 映像与混沌. 北京：国防工业出版社，1992.

第二章 一阶微分方程的解法

第一章给出了微分方程解的存在性定理，但解的存在并不代表能给出其具体表达式（即分析解）， 例如，对形式很简单的里卡蒂（Riccati）方程:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

虽然当 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 连续时解是存在的，但一般没有初等解法，这一事实为法国数学家刘维尔（Liouville）于 1841 年所证明. 对于高阶微分方程或微分方程组，找到其分析解就更困难了.

尽管这样，对于形式特殊的微分方程或微分方程组，可用数学分析或（和）高等代数的方法求其分析解（包括特解和通解）. 本章将介绍一阶微分方程的求解方法，包括分离变量法、变量变换法、积分因子法、参数表示法，其中积分因子法相对于分离变量法和变量变换法更具一般性，参数表示法主要用于处理隐式微分方程的解的表示. 这些都是常微分方程发展早期数学家的辛勤成果，既是常微分方程理论中很有自身特色的部分，也与实际问题密切相关，值得好好学习和体会.

本章将考虑下列两种类型的一阶微分方程

$$y'=\frac{dy}{dx}=F(x,y)\ \text{（显式）} \tag{2.1}$$

$$F(x,y,y')=0\ \text{（隐式）} \tag{2.2}$$

的求解问题. 注意到：利用一阶微分不变形，显式方程(2.1)可改写为下列等价形式 $dy-F(x,y)dx=0$ 或对称形式 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$. 一般地，分离变量法、变量变换法、积分因子法适用于第一类方程，参数表示法适用于第二类方程.

§2.1　分离变量法

若方程（2.1）中的函数 $F(x,y)$ 具有形式 $F(x,y)=f(x)g(y)$，即

$$y'=f(x)g(y) \tag{2.3}$$

则称微分方程（2.3）为**变量分离方程**，其中 $f(x), g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.

如果 $g(y)\neq 0$，可将方程（2.3）改写为

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

这样，变量 x,y 就"分离"开了. 上式中 y 可看作 x 的函数，两边积分则得

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int\frac{dy(x)}{g(y(x))}=\int f(x)dx+c. \tag{2.4}$$

这里，我们把积分常数 c 明确写出来，而把 $\int\frac{dy}{g(y)}$，$\int f(x)dx$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的一个原函数. 常数 c 的取值必须保证（2.4）式有意义，如无特别声明，以后也作这样理解.

关系式（2.4）可理解为 y、x、c 的隐函数关系式 $\Phi(y,x,c)=0$ 或 y 是 x、c 函数关系式 $y=y(x,c)$. 由积分关系式（2.4）可知：对任常数 c，由（2.4）所确定的函数关系式 $y=y(x,c)$ 满足变量分离方程，因而是它的通解.

注意到方程（2.4）不适合 $g(y)=0$ 的情形，但如果存在 y_0 使得 $g(y_0)=0$，则可直接验证 $y=y_0$ 也是变量分离方程的解（即静态解）. 因此，还必须寻求 $g(y)=0$ 的解 y_0，且当 $y=y_0$ 不包括在方程的通解（2.4）中时，必须补上

特解 $y=y_0$.

例 2.1 求线性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y$$

的通解，其中 $P(x)$ 是 x 的连续函数.

解 分离变量得

$$\frac{dy}{y}=P(x)dx.$$

两边积分得

$$\ln|y|=\int P(x)dx+\bar{c},$$

其中 $\bar{c}$ 为任意常数. 整理得

$$|y|=e^{\int P(x)dx+\bar{c}}$$

或

$$y=\pm e^{\bar{c}}\cdot e^{\int P(x)dx}=ce^{\int P(x)dx}$$

此即为方程的通解，其中 $c=\pm e^{\bar{c}}$. 此外，方程还有特解 $y=0$.

注 2.1 变量分离方程是可求解的一阶微分方程的一种基本形式，相当一部分可求解的一阶微分方程均是通过若干初等变换化为变量分离方程来求解的. 下面介绍两种可化为变量分离方程的简单情形，更多的细节不在这里讨论.

（1）**齐式微分方程**

形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.5}$$

的方程称为**齐式微分方程**，这里$g(u)$是u的连续函数.

通过变量变换$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. 因此方程（2.5）化为下列变量分离方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x},$$

因此齐式微分方程是可求解的.

下面，给出一个求解齐式微分方程的例子.

例题 2.2 求微分方程$y'=\frac{dy}{dx}=-2+\left(\frac{y}{x}\right)^2$的所有解.

解 这一方程属于齐式微分方程. 作变换$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. 因此方程（2.5）化为下列变量分离方程

$$xu'=u^2-u-2=(u-2)(u+1)$$

分离变量并积分得

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|=\tilde{c}+\ln|x|$$

整理后得

$$y=2x+cx^3(x+y)$$

其中，$c=\pm e^{3\tilde{c}}$是不为零的任意常数. 此外，方程有解：$y=\pm 2x$. 因此，若允

许 c 等于零的话，则通解 $y=2x+cx^3(x+y)$ 包含了原方程的所有解.

（2）**分式线性方程**

形如方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

或更一般形式的方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2.6}$$

称为**分式微分方程**，其中 $f(u)$ 是 u 的连续函数．分式微分方程可化为变量分离方程来求解．我们区分下列三种情形：

(ⅰ) $c_1=c_2=0$ 情形。此时，$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ 属于齐式微分方程。根据前面的讨论，可通过变量变换 $u=\frac{y}{x}$ 化为变量分离方程来求解；

(ⅱ) $\Delta=a_1b_2-b_1a_2=0$ 情形。此时，$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$ 。若令 $u=a_1x+b_1y$，则方程（2.6）化为 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=g(u)$，而 $\frac{du}{dx}=a_1+b_1g(u)$ 显然已属于变量分离方程，因此是可求解的；

(iii) $\Delta=a_1b_2-b_1a_2\neq0$ 情形。先求解联立代数方程 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 得唯一解 $\begin{cases}x=\alpha\\y=\beta\end{cases}$，再作变量代换 $\begin{cases}X=x-\alpha\\Y=y-\beta\end{cases}$，将方程（2.6）化为齐式微分方程

$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)$来求解.

例 2.3 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y-1}$$

解 先解代数方程

$$\begin{cases}x+y+3=0\\ x-y-1=0\end{cases}$$

得$x=-1,\ y=-2$．作变量代换

$$x=X-1, y=Y-2$$

原方程化为齐式微分方程

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{X-Y}$$

令$u=\frac{Y}{X}$, $Y=uX$，则进一步化为变量分离方程

$$\frac{dX}{X}=\frac{1-u}{1+u^2}du$$

两边积分得

$$\ln X^2=\tan u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)+c_1$$

$$\ln\left(X^2\sqrt{1+u^2}\right)=\tan u+c_1$$

代回原变量得

$$\ln\left(X\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\tan\frac{Y}{X}+c_1$$

$$\ln\left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\right]=\tan\frac{y+2}{x+1}+c_1$$

因 $c_1=0$ 时亦为方程的解．最后得原方程的通解为

$$\ln\left[(x+1)\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\right]=\tan\frac{y+2}{x+1}+c$$

其中 c 为任意常数.

例 2.4　解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$.

解　令 $z=x+y$ ，则由 $\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$ ，原方程变为 $\frac{dz}{dx}=1+\tan^2 z=\sec^2 z$. 分离变量并积分得

$$\frac{dz}{\sec^2 z}=dx,\qquad \int\frac{dz}{\sec^2 z}=\int dx+c,\qquad \frac{z}{2}+\frac{1}{4}\sin 2z=x+c$$

代回原变量得通解

$$2(x+y)+\sin(x+y)=4(x+c)$$

其中 c 为任意常数.

习题 2.1

1. 求下列方程的所有解

(1) $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{y}e^{y^2-2x}=0$;

(2) $(2+3x)ydx+(3-2y)xdy=0$;

(3) $x(dx+dy)+y(-dx+dy)=0$;

(4) $2x\frac{dy}{dx}-y+3\sqrt{x^2+y^2}=0$;

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+x^2y}{1+x^2}$;

(6) $x\ln\frac{x}{y}dx+(x+y)dy=0$.

2. 作适当的变量变换求解下列方程

(1) $\frac{dy}{dx}=(2x+y)^2$；

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$；

(3) $\frac{dy}{dx}=(x+1)^2+(2y+1)^2+4xy-5$；

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+xy^2-x}{x^2y-y^3}$.

3. 证明方程 $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=f(xy)$ 经变换 $xy=u$ 可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

(1) $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2y^2}{2-3x^2y^2}$；　　(2) $y(2-x^2y^2)dx=3xdy$.

4. 证明方程 $y\frac{dy}{dx}=f(x^2+y^2)-x$ 经变换 $z=x^2+y^2$ 可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

(1) $\left[2(x^2+y^2)-x\right]dx=ydy$；　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1-4x-2x^2-2y^2+2x^3+2xy^2}{2y(2+x^2+y^2)}$.

5. 已知 $f(x)=x^2\int_0^x f(t)dt$，试求函数 $f(x)$ 的分析表达式.

6. 求一曲线，使得在它上面的每一点的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两段.

§2.2 变量变换法

首先，考虑一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x), \tag{2.7}$$

这里 $P(x),Q(x)$ 在某区间上是 x 的连续函数. 若 $Q(x)\equiv 0$，则方程（2.7）化为方程（2.3），称之为**一阶齐次线性微分方程**. 若 $Q(x)\neq 0$，则方程（2.7）称为**一阶非齐次线性微分方程**. 注意到：方程（2.7）一般不属于前面讨论的变量分离方程，因此求解它需要提出其它方法. 这里，采用变量变换法来求解方程（2.7），但采用下一章介绍的常数变易法也容易求得（2.7）的通解.

作变量变换

$$y=ze^{\int P(x)dx} \tag{2.8}$$

代入方程（2.7）得

$$\frac{dz}{dx}e^{\int P(x)dx}+zP(x)e^{\int P(x)dx}=P(x)ze^{\int P(x)dx}+Q(x),$$

即

$$\frac{dz}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

积分上式得

$$z=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+\bar{c}\ ,$$

这里 $\bar{c}$ 是任意常数. 因此方程（2.7）的通解为

$$y=\bar{c}e^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx \tag{2.9}$$

这里 $\bar{c}$ 是任意常数.

上述过程表明: 通过变换 (2.8) 把方程 (2.7) 化为变量分离方程求解. 式（2.9）由两部分构成：一部分是齐次线性方程的通解，另一部分是非齐次线性方程的特解. 在第三章中，我们将看到这是线性微分方程的一般性结论.

若考虑的方程不能化为（2.7）的形式，可以将 x 看作 y 的函数，再看能否化为（2.7）的形式.

例 2.5 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{2x+y^2}$ 的通解

解 原方程不是 y 的线性方程，但可改写为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x+y^2}{2y}=\frac{x}{y}+\frac{1}{2}y \tag{2.10}$$

它属 x 关于 y 的一阶非齐次线性微分方程，这里 $P(y)=\frac{1}{y}$， $Q(y)=\frac{1}{2}y$.

依据（2.8），作变量变换： $x=ze^{\int P(y)dy}=zy$，代入方程（2.10）得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dz}{dy}y+z=\frac{1}{y}zy+\frac{1}{2}y$$

即有 $\frac{dz}{dy}=\frac{1}{2}$，解之得

$$z=\frac{1}{2}y+c$$

从而原方程的通解为

$$x=\frac{1}{2}y^2+cy$$

其中 c 为任意常数.

其次，介绍**伯努利方程**（Bernoulli）的求解方法.

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{2.11}$$

的微分方程称为伯努利方程，其中 $P(x),Q(x)$ 是 x 的连续函数， $n\neq 0,1$ 是常数.

作变量变换 $z=y^{1-n}$，则方程（2.11）化为一阶线性方程

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x).$$

通过形如（2.8）的变量变换，它进一步变成变量分离方程，从而可求得通解. 此外，当 $n>0$ 时方程（2.11）还有解 $y=0$.

亦可作变量变换 $y=ze^{\int P(x)dx}$，则方程（2.11）化为下列变量分离方程

$$\frac{dz}{dx}=z^n\left(Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}\right).$$

可直接求得

$$\frac{1}{1-n}z^{1-n}=\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+C.$$

代回原变量得

$$y^{1-n}=(1-n)e^{(1-n)\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{(n-1)\int P(x)dx}dx+C\right).$$

这表明：第二种变量变换比第一种变量变换更具优势.

例 2.6 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}+xy^3$ 的通解.

解 这是 $n=3$ 时的伯努利方程. 可通过上面介绍的两种类型的变量变换法求解，这里只介绍第一种变量变换法，读者可试着用第二种变量变换法

求解. 作变量变换 $z=y^{1-n}=y^{-2}$，则原方程化为线性微分方程

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}=-2y^{-3}\left(\frac{2y}{x}+xy^{3}\right)=-\frac{4}{x}z-2x$$

求得其通解为

$$z=\frac{c}{x^4}-\frac{x^2}{3}$$

其中 c 为任意常数. 代回原变量 y 即得原方程的通解

$$\frac{1}{y^2}=\frac{c}{x^4}-\frac{x^2}{3}$$

或

$$\frac{x^4}{y^2}+\frac{x^6}{3}=c,$$

其中 c 为任意常数. 此外，原方程还有特解 $y=0$.

第三，介绍**里卡蒂方程**（Riccatti）的求解方法.

形如

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x) \tag{2.12}$$

的方程称为里卡蒂方程，其中 $P(x),Q(x),R(x)$ 均为连续函数。假设方程（2.12）有一个已知特解 $y=\varphi(x)$，则通过变换 $y=z+\varphi(x)$ 方程（2.12）可变为下列形式的伯努利方程

$$\frac{dz}{dx}=\left[2P(x)+Q(x)\right]z+P(x)z^2$$

而伯努利方程通过变量变换可变为一阶线性微分方程，因此是可求解的.

例 2.7 已知$y=1$是微分方程$xy'=-xy^2+y+x-1$的一个解，求另一个解.

解 作变换$y=z+1$，则原方程变为伯努利方程

$$z'=\left(\frac{1}{x}-2\right)z-z^2$$

再作变换$z=w^{-1}$，上述方程进一步变成一阶线性微分方程

$$w'=\left(2-\frac{1}{x}\right)w+1$$

可求得它的通解为

$$w=-\frac{2x+1}{4x}+\frac{c}{x}e^{2x}$$

其中c是任意常数. 代回原变量得原方程的解为

$$(y-1)\left[-(2x+1)+4ce^{2x}\right]=4x$$

注意到：对里卡蒂方程（2.12），若作变量变换

$$z(x)=\exp\left[-\int P(x)y(x)dx\right]$$

则变成下列二阶线性微分方程：

$$P(x)z''-\left[P'(x)+P(x)Q(x)\right]z'+P^2(x)R(x)z=0 \qquad (2.13)$$

读者可直接验证之. 一般地，方程（2.13）比方程（2.12）更容易求得解（因为前者是线性方程），请看下一章的更多细节.

最后，我们指出：变量变换法的技巧性很高，需依具体问题作适当的变换，没有一般的规律可循.

习题 2.2

1. 求下列方程的所有解:

(1) $\frac{dx}{dt}=2x\cos t-3\sin 2t$;

(2) $\left[y(1-2x)-x\right]dx+xdy=0$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{2x+y^2}$;

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+y^2}{3xy}$;

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{2e^y+3x}{x^2}$;

(6) $y=xe^x+3\int_0^x y(t)dt$.

2. 对于伯努利方程（2.11），若 $P(x)$ 为常数 a，则变量变换 $y=ze^{ax}$ 可把伯努利方程变成变量分离方程，由此求解伯努利方程.

3. 试验证:

（1）Riccati 方程（2.12）经过变换 $z(x)=\exp\left[-\int P(x)y(x)dx\right]$，可变为下列线性方程

$$P(x)z''-\left[P'(x)+P(x)Q(x)\right]z'+P^2(x)R(x)z=0$$

（2）方程 $y'=ay^2+bx^{-2}$ 有形如

$$y=\frac{\lambda}{x}-x^{2a\lambda}\left(\frac{ax}{2a\lambda+1}x^{2a\lambda}+C\right)^{-1}$$

的解，其中C是任意常数，λ是代数方程$a\lambda^2+\lambda+b=0$的根.

4. 若平面曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项，试求此曲线.

5. 试证:

（1）一阶齐次线性微分方程（2.7）的所有解组成一个向量空间;

（2）若$y_1(x),y_2(x)$是一阶非齐次线性微分方程（2.7）的两个解，则$y_1(x)-y_2(x)$是相应的齐次线性微分方程（2.7）的解;

（3）若$y=y(x)$是齐次方程（2.7）的解，而$y=\tilde{y}(x)$是非齐次方程（2.7）的解，则非齐次方程（2.7）的通解可表为$y=cy(x)+\tilde{y}(x)$，其中c为任意常数.

6. 求下列 Riccati 方程的所有解:

(1) $y'+2e^xy^2-5e^{2x}y=e^x-3e^{3x}$;

(2) $2y'+y^2-3y\sin x=2\left(-1+\cos x+\cos^2 x\right)$;

(3) $x^2y'=xy(xy+1)-3$;

(4) $4x^2\left(-y'+2y^2\right)=3$;

(5) $3x^2y'+(2xy-1)^2=0$;

(6) $2y'=(x-2)y^2+2(1-x)y+x$.

§2.3　积分因子法

考虑下列对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.14}$$

这里假设函数$M(x,y), N(x,y)$定义在某矩形域内，且具有连续的一阶偏导数$\frac{\partial M}{\partial y}$与$\frac{\partial N}{\partial x}$. 与变量分离方程及线性方程相比，方程（2.14）更具一般性，一般不能用前面介绍的两种方法求解. 本节将介绍积分因子法，它比上面介绍的变量分离法与变量变换法应用更广.

如果方程（2.14）的左端恰为某个函数$u(x,y)$的全微分，即

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du(x,y)\ , \tag{2.15}$$

则称（2.15）为**恰当方程**，此时方程（2.15）的通解为 $u(x,y) = c$. 注意函数u相当于数学分析中的势函数，因此求恰当方程的解即求势函数.

这样，自然会提出如下问题:

1. 如何判断方程（2.14）是恰当方程?
2. 如果方程（2.14）是恰当方程，如何求相应的全微分函数（势函数）?
3. 如果方程（2.14）不是恰当方程，能否将它的求解问题转化为一个与之等价的恰当方程的求解问题?

下面的定理对问题 1 和 2 给出了完满的回答.

定理 2.1 假设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在矩形域

$$R:\quad a < x < b,\quad c < y < d$$

内是x, y的连续函数，且具有连续的一阶偏导数$\frac{\partial M}{\partial y}$和$\frac{\partial N}{\partial x}$，则方程（2.14）

为恰当方程的充分必要条件为等式

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.16}$$

在 R 内恒成立．当条件（2.16）满足时，方程（2.14）的全微分函数（势函数）可表示为

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy \tag{2.17}$$

或

$$\bar{u}(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy, \tag{2.18}$$

这里 (x_0,y_0) 是 R 内任意取定的一点，积分式 $\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx$ 表示对 x 的偏积分，即把 y 视为常量而对 x 进行积分；积分式 $\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy$ 表示对 y 的偏积分，即把 x 视为常量而对 y 进行积分.

证 先证必要性．假设方程（2.14）为恰当方程，则存在满足（2.14）的函数 $u(x,y)$，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=M(x,y),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=N(x,y). \tag{2.19}$$

由于 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数 $\frac{\partial M}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial N}{\partial x}$，在（2.19）的第一式和第二式中，分别对 y 和 x 求偏导数可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial M}{\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial N}{\partial x}(x,y),$$

且混合偏导数$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$是连续的．于是$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$，因此(2.16)成立.

再证充分性．假设函数$M(x,y)$和$N(x,y)$满足条件（2.16），现在来构造函数$u(x,y)$满足（2.19）．为了使（2.19）的第一式成立，可取

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y), \tag{2.20}$$

其中函数$\varphi(y)$待定但须使$u(x,y)$满足（2.19）的第二式．在式（2.20）的两边对y求偏导数并结合条件（2.16），可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx+\varphi'(y)$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y).$$

这样，为了使$u(x,y)$满足（2.19）的第二式，只要令$\varphi'(y)=N(x_0,y)$，或取

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

便可．这样就构造出满足（2.15）或 （2.19）的一个函数

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy,$$

此即为（2.17），说明方程(2.14)为恰当方程.

如果在构造函数$u(x,y)$时先使（2.19）的第二式成立，再满足第一式，则类似可得另一个满足（2.15）或 （2.19）函数

$$\bar{u}(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy,$$

此即为（2.18），也说明方程（2.14）为恰当方程.

定理证毕．■

注 2.2 函数$u(x,y)$和$\bar{u}(x,y)$的全微分相同，因此它们之间只差一个常数. 再由$u(x_0,y_0)=\bar{u}(x_0,y_0)=0$可知$u(x,y)\equiv\bar{u}(x,y)$.

例 2.8 解方程 $(2x^4+3xy^2)dx+(3x^2y-y^2)dy=0.$

解 这里$M=2x^4+3xy^2,\quad N=3x^2y-y^2$，且有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=6xy$$

表明它是恰当方程. 现在求u，使其满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=2x^4+3xy^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N=3x^2y-y^2$$

偏积分x第一式得

$$u=\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)$$

上式对y偏微分得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=3x^2y-y^2$$

于是$\frac{d\varphi(y)}{dy}=-y^2$，由此解得$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3$，从而全微分函数为

$$u=\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}y^3$$

而原方程的通解为

$$\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}y^3=c$$

其中c为任意常数.

亦可直接应用全微分公式来求方程的通解，即

$$\int_0^x M(x,y)dx + \int_0^y N(0,y)dy = \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}y^3 = c.$$

注 2.3 对于某些恰当方程，不必硬套公式（2.17）或（2.18），可采用分项组合成全微分的方法，从而给出势函数．为此，需要记住某些常见的二元函数的全微分为，例如，

$$\left.\begin{aligned} &ydx + xdy = d(xy), \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right), \\ &\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right), \\ &\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(arctg\,\frac{y}{x}\right), \quad \frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

这对应用分项组合法求全微分函数是重要的.

例 2.9 用“分项组合”方法求解例 2.8 的解.

解 重组

$$(2x^4 + 3xy^2)dx + (3x^2y - y^2)dy = 2x^4dx - y^2dy + 3\left(xy^2dx + x^2ydy\right)$$
$$= \frac{2}{5}dx^5 - \frac{1}{3}dy^3 + \frac{3}{2}d\left(x^2y^2\right) = d\left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}x^2y^2\right)$$

即得方程的通解为

$$\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}y^3 = c$$

其中 c 为任意常数.

注 2.4 如果 R 不是矩形域而只是单连通区域 G，则定理 2.1 中关于充分必要条件这部分仍成立，但全微分函数不能用（2.17）和（2.18）去求，因为（2.17）和（2.18）中的积分区间可能跑到 G 的外面去了．对于这种情况，

全微分函数可用与路径无关的曲线积分去求：

$$u(x,y)=\int_{\Gamma} M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

这里路径Γ是从点(x_0,y_0)到点(x,y)的一条逐段光滑曲线，它完全位于G内．此时，定理 2.1 充分性部分的证明也要依赖于曲线积分理论．如果区域不是单连通的，那么$u(x,y)$不一定是单值的，可能是多值的．

对于问题（3），先引入积分因子的概念．如果存在连续可微的函数$\mu(x,y)\neq 0$，使得$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy$ 为一恰当方程，即存在函数$\upsilon(x,y)$使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy\equiv d\upsilon(x,y), \tag{2.22}$$

则称$\mu(x,y)$为方程(2.12)的**积分因子**.

这时，$\upsilon(x,y)=c$是方程(2.22)的通解，因而也是方程(2.14)的通解.

由（2.21）可以看到，同一方程$ydx-xdy=0$可以有不同的积分因子，如$\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy}$，$\frac{1}{x^2\pm y^2}$等．可以证明，只要方程有解存在，则必有积分因子存在，并且不是唯一的．因此，在具体解题过程中，由于求出的积分因子不同从而导致通解具有不同的形式.

根据定理 2.1，函数$\mu(x,y)$为方程（2.14）的积分因子的充分必要条件是$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{2.23}$$

这是一个以μ为未知函数的一阶线性偏微分方程．以后将会知道，虽然从理论上说偏微分方程（2.23）的解是存在的，但对它的求解又要归结到对原来方程(2.14)的求解，因此，从方程(2.23)出发求出积分因子的表达式$\mu=\mu(x,y)$再去求解方程（2.14）一般是不可取的．然而，对某些特殊形式，利用（2.23）去寻求（2.14）的积分因子却是可行的.

例 2.10

(1) 证明方程（2.14）具有形状为$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f\left(\varphi(x,y)\right),$$

并求出这个积分因子，其中$\varphi(x,y)$是x,y的已知连续函数，且具有连续的一阶偏导数.

(2) 利用上面(1)的结果可直接写出方程（2.14）具有如下形式的积分因子

$$\mu(x),\quad \mu(y),\quad \mu(x\pm y),\quad \mu(x^2\pm y^2),\quad \mu(xy),\quad \mu\left(\frac{y}{x}\right),\quad \mu(x^\alpha y^\beta)$$

的充要条件.

(3) 求解微分方程$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+y^3}{x^3+y}$.

证 (1) 由积分因子的充要条件 $N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$，将 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 代入得

$$\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\varphi}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \text{或} \left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}d\varphi=\frac{d\mu}{\mu}$$

因 μ 为 φ 的函数，故必有函数 $f(\varphi)$ 满足

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}=f(\varphi(x,y))$$

且其积分因子为

$$\mu=e^{\int f(\varphi)d\varphi}$$

(2) 直接将 $\varphi=x,\ y,\ x\pm y,\ x^2\pm y^2,\ xy,\ \frac{y}{x},\ x^\alpha y^\beta$ 分别代入上面的偏微分方程，易计算出相应的 $f(\varphi)$（从而可计算出各积分因子）:

$$f(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N},\quad f(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M},\quad f(x\pm y)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(N\mp M)^{-1},$$

$$f\left(x^2\pm y^2\right)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(Nx\mp My)^{-1},\quad f(xy)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)(Ny-Mx)^{-1},$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(\frac{M}{x}+\frac{Ny}{x^2}\right)^{-1},\quad f\left(x^\alpha y^\beta\right)=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(\frac{\alpha N}{x}-\frac{\beta M}{y}\right)^{-1}$$

(3) 原方程化为

$$\left(x+y^3\right)dx+\left(x^3+y\right)dy=0 \qquad (*)$$

令 $\varphi=x^2+y^2$，则

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial \varphi}{\partial x}-M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{-1}=\left(3y^2-3x^2\right)\left(2x^4-2y^4\right)^{-1}=-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1}=-\frac{3}{2}\varphi^{-1}$$

即知方程（*）有积分因子 $\mu=e^{-\int\frac{3}{2}\varphi^{-1}d\varphi}=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$．这样，两边同乘以积分因子 $\mu=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ 得

$$\begin{aligned}0&=\frac{x+y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^3+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy\\&=\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(y^2+x^2)ydx+(x^2+y^2)xdy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{yx^2dx+xy^2dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\&=-d(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+d\left[\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\end{aligned}$$

故方程的通解为 $\frac{xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=c$，或 $xy-1=c\sqrt{x^2+y^2}$，其中 c 为任意常数.

例 2.11 试用积分因子法求解线性微分方程 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$.

解 原方程可变形为

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0$$

那么 $M=P(x)y+Q(x),\quad N=-1$．又

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x)$$

故方程有积分因子 $\mu(x)=e^{-\int P(x)dx}$．这样，由

$$\begin{aligned}&P(x)e^{-\int P(x)dx}ydx-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\\&\quad=-yde^{-\int P(x)dx}-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=-d\left(ye^{-\int P(x)dx}\right)+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx\end{aligned}$$

得通解

$$ye^{-\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx = c$$

即

$$y = e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + c\right).$$

例 2.12 解微分方程 $(y^2+2xy)dx - x^2dy = 0$.

微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ 既属于齐式微分方程也属于伯努利方程，故也可用前面介绍的方法求解，请读者自己演练一遍. 这里应用积分因子法求解.

因 $M = y^2+2xy, N = -x^2, \frac{\partial M}{\partial y} = 2y+2x \neq -2x = \frac{\partial N}{\partial x}$，微分方程不是恰当方程，但

$$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2y+4x}{-(y^2+2xy)} = -\frac{2}{y}$$

可取 $\mu(y)$ 型积分因子. 可取 $\mu(y)$ 型积分因子 $\mu(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$. 用 $\mu = y^{-2}$ 乘方程 $(y^2+2xy)dx - x^2dy = 0$ 左边得

$$y^{-2}[(y^2+2xy)dx - x^2dy] = dx + (y^{-1}dx^2 + x^2dy^{-1}) = d(x + x^2y^{-1}),$$

故原方程有通解 $x + x^2y^{-1} = c$，其中 c 为任意常数.

此外，原方程还有特解 $y = 0$.

这一例子能够说明：求解一个微分方程可有多种方法.

习题 2.3

1. 验证下列方程都是恰当微分方程，并求出方程的解：

(1) $\left(2x^2+3y\right)dx + \left(3x-y^2\right)dy = 0$；

(2) $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy=0$；

(3) $\left(x\sin(x+y)-\cos(x+y)\right)dx+x\sin(x+y)dy=0$.

2. 试用“分项组合”方法求解第一大题.

3. 求下列方程的解:

(1) $2x\left(ye^{x^2}-x^2\right)dx+\left(e^{x^2}-1\right)dy=0$；

(2) $\left(e^x-3y^2\right)dx+2xydy=0$；

(3) $3x^2ydx-\left(x^2+1\right)dy=0$；

(4) $ydx-xdy=3\left(x^2+y^2\right)dx$；

(5) $ydx-\left(x+y^3\right)dy=0$；

(6) $2xydx-\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

4. 试求

(1) 变量分离方程的积分因子;

(2) 伯努利微分方程的积分因子.

5. 微分方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$称为齐式方程，假如存在常数α和β，使得对任意的t有$M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y)$， $N(tx,ty)=t^{\beta}N(x,y)$.

(1) 试证齐式方程当$xM+yN\neq 0$时有积分因子$\mu=\frac{1}{xM+yN}$；

(2) 假设齐式方程还是恰当的，试验证它的通解为$xM(x,y)+yN(x,y)=c$ (其中c为任意常数).

6. 两类特殊微分方程的积分因子:

（1）设函数 $f(u),g(u)$ 连续、可微且 $f(u)\neq g(u)$，则微分方程

$$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$$

具有积分因子 $\mu=\left[xy\left(f(xy)-g(xy)\right)\right]^{-1}$；

（2）假设微分方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 中的函数 M,N 满足关系

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y)$$

其中 $f(x),g(y)$ 分别是 x,y 的连续函数，则此方程有如下形式的积分因子

$$\mu=\exp\left(\int f(x)dx+\int g(y)dy\right)$$

7. 试证积分因子具有下列性质:

（1）设 $\mu(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的积分因子，相应的可微势函数 $U(x,y)$ 满足全微分 $dU=\mu(Mdx+Ndy)$. 试证 $\tilde{\mu}(x,y)$ 也是该方程的积分因子的充要条件是 $\tilde{\mu}(x,y)=\mu(x,y)\varphi(U)$，其中 $\varphi(t)$ 是 t 的某个可微函数.

（2）设 $\mu_1(x,y),\mu_2(x,y)$ 是方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 的两个积分因子，且 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 不恒为常数，则 $\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ (任意常数)是方程的通解.

§2.4　参数表示法

前面三节都是针对导数 y' 已经解出的显式微分方程 $y'=f(x,y)$ 来介绍求解方法，本节将介绍一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的求解方法，具体分以下几种情况:

情形 1 可解出 y （或 x ）的方程

(1) $y=f(x,y')$．令 $y'=p$ ，方程 $y=f(x,y')$ 两边对 x 求导得 $p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ ，或

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial p}$$

这可视为 x,p 的一阶显式微分方程，因此可用前面介绍的方法求解．若其解为 $p=\varphi(x,c)$ ，则原方程的通解为 $y=f(x,\varphi(x,c))$ ；若其解为 $x=\psi(p,c)$ ，则原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\psi(p,c) \\ y=f(\psi(p,c),p) \end{cases}，\quad p\text{是参数，}\quad c\text{是任意常数；}$$

若其解为 $\Phi(x,p,c)=0$ ，则原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} \Phi(x,p,c)=0, \\ y=f(x,p), \end{cases}，\quad p\text{是参数，}\quad c\text{是任意常数.}$$

(2) $x=f(y,y')$．令 $y'=p$ ，方程 $x=f(y,y')$ 两边对 y 求导得 $\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}$ ，视为 y,p 的一阶显式微分方程解之．若其解为 $p=\varphi(y,c)$ ，则原方程的通解为 $x=f(y,\varphi(y,c))$ ；若其解为 $y=\psi(p,c)$ ，则原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=f(y,\psi(p,c)) \\ y=\psi(p,c) \end{cases}，\quad p\text{是参数，}\quad c\text{是任意常数；}$$

若其解为 $\Psi(y,p,c)=0$ ，则原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=f(y,p), \\ \Psi(y,p,c)=0, \end{cases}，\quad p\text{是参数，}\quad c\text{是任意常数.}$$

例 2.13 求解微分方程 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4x\frac{dy}{dx}-2y=0$.

解 可解出 y 或 x．令 $p=\frac{dy}{dx}$，解出 x（若解出 p 来，则形式复杂）得

$$x=\frac{2y-p^3}{4p}$$

两边对 y 求导

$$\frac{1}{p}=\frac{p\left(2-3p^2\frac{dp}{dy}\right)-(2y-p^3)\frac{dp}{dy}}{4p^2}$$

即

$$4p=2p-3p^3\frac{dp}{dy}-2y\frac{dp}{dy}+p^3\frac{dp}{dy}=2p-2y\frac{dp}{dy}-2p^3\frac{dp}{dy}$$

$$pdy+ydp+p^3dp=0$$

积分得 $4yp+p^4=c$，即 $y=\frac{c-p^4}{4p}$，代入 $x=\frac{2y-p^3}{4p}$ 得

$$x=\frac{2\frac{c-p^4}{4p}-p^3}{2p}=\frac{c-3p^4}{4p^2}$$

因此，原方程有参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\frac{c}{4p^2}-\frac{3p^2}{4} \\ y=\frac{c}{4p}-\frac{p^3}{4} \end{cases},\quad p\neq 0$$

此外，原方程还有特解 $y=0$．类似地，若先解出 y，亦可求得通解.

例 2.14 求解微分方程 $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}$.

解 令 $p=\frac{dy}{dx}$，得

$$y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$$

两边对 x 求导得

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$$

化为

$$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0$$

从 $\frac{dp}{dx}-1=0$，解得 $p=x+c$，代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$ 得方程的通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2$$

又从 $2p-x=0$，解得 $p=\frac{x}{2}$，代入 $y=p^2-xp+\frac{x^2}{2}$ 得方程的另一解

$$y=\frac{x^2}{4}$$

此解与方程的通解中的任一解相切，这样的解称为**奇解**，参考图 2..

附 2.5 关于奇解，附录中给出了更多内容.

情形 2 不显含 y（或 x）的方程

(3) $F(x,y')=0$. 令 $y'=p$，方程化为 $F(x,p)=0$，从几何的观点看它代表 (x,p)平面上的一条曲线，设其有如下参数形式

$$x=\varphi(t),\quad p=\psi(t),$$

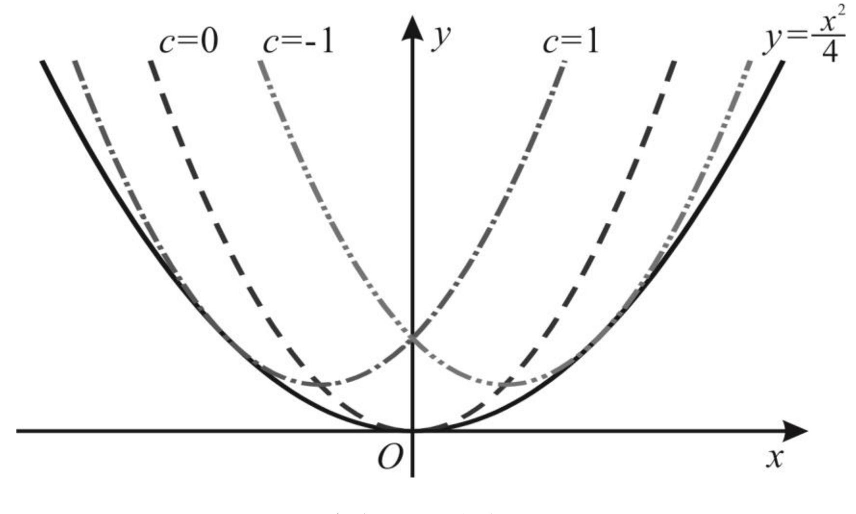


图 2.1 奇解.

这里t是参数，$\varphi(t)$关于t连续可微，$\psi(t)$关于t连续. 则有

$$dy = pdx = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

积分上式可得原方程参数形式的通解

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases},\quad t\text{是参数，}c\text{为任意常数.}$$

(4) $F(y, y') = 0$. 令$y' = p$，方程化为$F(y, p) = 0$，从几何的观点看它代表(y, p)平面上的一条曲线，设其有如下参数形式

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t),$$

这里t是参数，$\varphi(t)$关于t连续可微，$\psi(t)$关于t连续且$\psi(t) \neq 0$. 则有

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt.$$

积分上式可得原方程参数形式的通解为

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases},\quad t\text{是参数，}c\text{为任意常数.}$$

此外，若$F(y,0)=0$有实根$y=k$，则$y=k$也是方程的解.

例 2.15 求解微分方程 $x^3+y'^3-xy'=0,\quad y'=\dfrac{dy}{dx}$.

解 令$y'=p=tx$，代入方程得

$$x=\frac{t}{1+t^3},\quad p=\frac{t^2}{1+t^3},\quad dy=\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$$

积分之

$$y=\int\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt=\frac{1}{6}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c$$

得方程参数形式的通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{1}{6}\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c \end{cases}$$

例 2.16 求解微分方程 $y^2\left(2-\dfrac{dy}{dx}\right)=\left(3-\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

解 令 $3-y'=ty$，与原方程消去y'得

$$y^2(ty-1)=t^2y^2,\quad y=\frac{1}{t}+t$$

代入$3-y'=ty$ 得

$$y'=2-t^2,\quad dx=\frac{dy}{y'}=\frac{t^2-1}{\left(2-t^2\right)t^2}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2-t^2}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

积分之

$$x=\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+\frac{1}{t}+c$$

得方程参数形式的通解

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + \dfrac{1}{t} + c \\ y = \dfrac{1}{t} + t \end{cases}$$

其中 c 为任意常数.

此外，当 $y'=0$ 时原方程变为 $y^2=4$，于是 $y=\pm 2$ 也是方程的解.

情形 3 一阶隐式微分方程 $F(x,y,y')=0$．令 $y'=p$，方程化为 $F(x,y,p)=0$，从几何的观点看它代表 (x,y,p) 空间的一曲面，设其参数方程为

$$x=f(u,\upsilon),\ y=g(u,\upsilon),\ p=h(u,\upsilon),$$

这里 u 和 υ 是两个参数．由于 $dy=pdx$，故

$$g'_u du + g'_\upsilon d\upsilon = h(u,\upsilon)\left(f'_u du + f'_\upsilon d\upsilon\right).$$

整理得

$$M(u,\upsilon)du + N(u,\upsilon)d\upsilon = 0, \tag{2.24}$$

其中 $M(u,\upsilon)=g'_u(u,\upsilon)-h(u,\upsilon)f'_u(u,\upsilon)$, $N(u,\upsilon)=g'_\upsilon(u,\upsilon)-h(u,\upsilon)f'_\upsilon(u,\upsilon)$.

若能求得一阶显式微分方程（2.24）的通解 $\upsilon=\Phi(u,c)$，则方程 $F(x,y,y')=0$ 参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=f(u,\Phi(u,c)) \\ y=g(u,\Phi(u,c)), \end{cases} \quad u\text{是参数，}c\text{为任意常数；} \tag{2.25}$$

此外，若方程（2.24）除通解（2.25）外还有特解 $\upsilon=\Psi(u)$，则方程 $F(x,y,y')=0$ 有参数形式的特解

$$x=f(u,\Psi(u)),\quad y=g(u,\Psi(u))\text{，}\quad u\text{是参数.}$$

例 2.17 求解微分方程

$$y'^2+2y-3x=0$$

解 令$u=x$和$\upsilon=y'$为两个参数，则由原方程可得

$$x=u,\quad y'=\upsilon,\quad y=\frac{1}{2}\left(3u-\upsilon^2\right)$$

于是

$$\upsilon=\frac{dy}{dx}=\frac{3du-2\upsilon d\upsilon}{2du},\qquad \text{也即}\ (2\upsilon-3)du+2\upsilon d\upsilon=0.$$

容易求得它的通解为

$$u=-\upsilon+\frac{3}{2}\ln\left|2\upsilon-3\right|+c\qquad c\ \text{为任意常数}$$

和一个特解$\upsilon=\frac{3}{2}$. 因此，原方程有如下形式的通解

$$\begin{cases} x=-\upsilon+\dfrac{3}{2}\ln\left|2\upsilon-3\right|+c \\ y=\dfrac{1}{4}\left(-6\upsilon+9\ln\left|2\upsilon-3\right|+6c-2\upsilon^2\right) \end{cases}$$

其中c为任意常数. 此外，还有一个特解$y=\frac{3}{4}(x-2)$.

习题 2.4

1. 求下列微分方程的解:

(1) $y=2x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$;

(2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+x\dfrac{dy}{dx}-2y=0$;

(3) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+(x+2)\dfrac{dy}{dx}-3y=0$;

(4) $y=2x\frac{dy}{dx}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

2. 求下列微分方程的解:

(1) $xy'^3=3-2y'$;

(2) $y'^3+x^3(2-5y')=0$;

(3) $y=2y'^2e^{y'}-y'$;

(4) $y(2-y'^2)=a$ (a 为常数);

(5) $x^2+y'^2=r^2$ （r 为常数）;

(6) $y^2(y'-n)=(n+1-y')^2$ （n 为整数）.

3. 求一曲线, 使在其上的每一点的切线截割坐标轴而成的直角三角形的面积等于 3. 提示: 微分方程 $y=xy'+f(y')$ 的通解为 $y=xc+f(c)$, 其中 c 为常数.

第三章 线性微分方程的通解结构与性质

第二章介绍了某些类型的一阶微分方程的求解方法，但没有研究解与解之间的关系（指通解结构与性质）．本章主要介绍线性微分方程组（包括齐次、非齐方程组）与高阶线性微分方程（包括齐次、非齐次方程）的通解的结构与有关性质，以及介绍齐次非线性微分方程的常数变易公式，但条件是假定相应的齐次微分方程存在若干个解. 常系数线性微分方程的通解结构与有关性质可作为本章的特例给出. 线性微分方程的通解包含了其所有的解，且任何特解均可通过通解结构中的任意常数来唯一确定.

§3.1　线性微分方程组的通解结构与性质

本节考虑下列两种类型的线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \text{（齐次线性微分方程组）} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \quad \text{（非齐次线性微分方程组）} \tag{3.2}$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的已知 $n \times n$ 连续矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 是区间 $a \le t \le b$ 上的已知 n 维连续列向量（注：本章出现的向量包括上面的 $\boldsymbol{x}$ 均为列向量）．主要介绍它们的通解的结构与性质,而常系数线性微分方程组(即 $\boldsymbol{A}(t)$ 为常量矩阵)的有关结果可作为推论给出. 此外，还介绍方程组（3.2）的特解的常数变易公式.

3.1.1 齐次线性微分方程组情形

显然，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 是方程组（3.1）的一个解（叫做平凡解）．除这种平凡解外，更感兴趣的是非平凡解，以及通解的结构与性质.

在介绍有关知识之前，先考察下列的例子.

例 3.1 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}$.

这是常系数线性微分方程组，显然，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是其平凡解．现在，来验证下列两个非平凡函数向量

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}e^{-2t}\cos 3t\\ -e^{-2t}\sin 3t\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}e^{-2t}\sin 3t\\ e^{-2t}\cos 3t\end{pmatrix}$$

也是方程组的解．事实上，

$$\boldsymbol{x}_1'=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e^{-2t}\cos 3t\\ -e^{-2t}\sin 3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-2t}\cos 3t-3e^{-2t}\sin 3t\\ 2e^{-2t}\sin 3t-3e^{-2t}\cos 3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-2t}\cos 3t\\ -e^{-2t}\sin 3t\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$$

这表明 $\boldsymbol{x}_1$ 是方程组的一个解．类似地，可验证 $\boldsymbol{x}_2$ 也是方程组的一个解．进一步，对任意两个常数 c_1,c_2，我们有

$$\frac{d\left(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2\right)}{dt}=\frac{d\left(c_1\boldsymbol{x}_1\right)}{dt}+\frac{d\left(c_2\boldsymbol{x}_2\right)}{dt}=c_1\boldsymbol{x}_1'+c_2\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{A}\left(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2\right)$$

这表明线性组合 $c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2$ 也是方程组的解，而且原方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2$．此外，由这两个解组成的行列式（记为 $W(t)=W\left[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)\right]$）为

$$W(t)=W\left[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)\right]=\begin{vmatrix}e^{-2t}\cos 3t & e^{-2t}\sin 3t\\ -e^{-2t}\sin 3t & e^{-2t}\cos 3t\end{vmatrix}=e^{-4t}$$

在 t 的任何区间上恒不为零.

这一例子的结果并不是偶然的．事实上，根据“常数可从微分号下提出来”以及“和的导数等于导数之和”法则，首先有下列一般性结果：

定理 3.1 (叠加原理) 假设方程组（3.1）有 k 个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_k(t)$，则

它们的任意线性组合

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k(t)$$

也是方程组（3.1）的解，其中$c_1,c_2,\cdots,c_k$为任意常数.

特别地，当$k=n$时，方程组（3.1）有解

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k(t) \tag{3.3}$$

它含有n个任意常数.

定理 3.1 说明，（3.1）的所有解的集合构成一个线性空间，但问题是：

（1）　非零解是否存在？又如何计算？

（2）在什么条件下，形式（3.3）能成为方程（3.1）的通解？又如何判断？

（3）通解具有什么性质？

本小节将完满地回答（1）的第一个问题及问题（2）和（3），下一章将部分地回答（1）的第二个问题（即对$\boldsymbol{A}(t)$是常数矩阵时，给出非零解的计算方法）. 为此，需要介绍向量函数组线性相关与线性无关的概念.

对定义在区间$a\le t\le b$上的一组n维向量函数$\boldsymbol{x}_i(t)\ (i=1,\cdots,m)$，如存在不全为零的常数$c_i\ (i=1,\cdots,m)$，使得在整个区间$a\le t\le b$上恒成立

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m(t)\equiv 0$$

则称它们**线性相关**；若上式只有当$c_i=0\ (i=1,\cdots,m)$时才成立，则称向量函数组$\boldsymbol{x}_i(t)\ (i=1,\cdots,m)$为在所$a\le t\le b$上**线性无关**；在其它情形，则称向量函数组

是**奇异**的.

例 3.2 对任一正整数k,下面的$k+1$个n维向量函数在t的任何区间上均线性无关

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\1\\1\\\vdots\\t\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\t^2\end{bmatrix},\quad\cdots\quad,\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\t^k\end{bmatrix},$$

而向量函数$(\cos^2 t,0,\cdots,0)^T$和$(\sin^2 t-1,0,\cdots,0)^T$在$t$的任何区间上均线性相关.

设有n个定义在区间$a\le t\le b$上的n维向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\x_{21}(t)\\\vdots\\x_{n1}(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{x}_2(t)=\begin{pmatrix}x_{12}(t)\\x_{22}(t)\\\vdots\\x_{n2}(t)\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)=\begin{pmatrix}x_{1n}(t)\\x_{2n}(t)\\\vdots\\x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

定义它们的**朗斯基**（Wronsky）**行列式**为

$$W(t)=W\left[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)\right]=\begin{vmatrix}x_{11}(t)&\cdots&x_{1n}(t)\\\vdots&\ddots&\vdots\\x_{n1}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

朗斯基行列式与向量函数的线性相关性有某种关系，特别是，它与方程组（3.1）的解向量函数的线性相关性有密切关系. 首先，证明下列定理:

定理 3.2 若向量函数$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性相关,则它们在区间$a\le t\le b$上的朗斯基行列式满足$W(t)\equiv 0$.

证 若向量函数$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性相关,则存在不

全为零的任意常数$c_1, c_2, \cdots, c_n$使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)=0, \qquad a\le t\le b$$

将上式视为以$c_1, c_2, \cdots, c_n$为未知变量的线性代数方程组，则其系数行列式就是由$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$组成的朗斯基行列式$W(t)$．由线性代数方程组的理论知,要使方程组有非零解,则其系数行列式必须为零,即$W(t)\equiv 0, \quad a\le t\le b$．■

注 3.1 当定理 3.2 中$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$为一般向量函数时，其线性相关时$W(t)\equiv 0$的逆定理不一定成立．例如，向量函数$\boldsymbol{x}_1(t)=\left(x_1(t), x_1'(t)\right)^T$，$\boldsymbol{x}_2(t)=\left(x_2(t), x_2'(t)\right)^T$，其中

$$x_1(t)=\begin{cases} t^3, & -1\le t<0 \\ 0, & 0\le t\le 1 \end{cases}, \qquad x_2(t)=\begin{cases} 0, & -1\le t<0 \\ t^3, & 0\le t\le 1 \end{cases}$$

在区间$-1\le t\le 1$上有$W[x_1(t), x_2(t)]\equiv 0$，但却线性无关.

然而，如果向量函数$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$是齐次线性方程组（3.1）的$n$个解时，则有下列结果:

定理 3.3 若方程组（3.1）的n个解$\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$在区间$a\le t\le b$上线性无关，则它们的朗斯基行列式$W(t)$在区间$a\le t\le b$上恒不为零.

证 反证之．设存在某个$t_0 \quad (a\le t_0\le b)$，使得$W(t_0)=0$．考虑线性代数方程组

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)=0$$

因它的系数行列式$W(t_0)=0$，故上式有非零解$\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \cdots, \tilde{c}_n$．由定理 3.1 知函数

$$\boldsymbol{x}(t)=\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)$$

亦是方程组（3.1）的解，且$\boldsymbol{x}(t_0)=0$．但方程组（3.1）的零解也满足此初始条件，由第一章的解的存在唯一性定理知$\boldsymbol{x}(t)\equiv 0\ (a\le t\le b)$，即

$$\tilde{c}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\tilde{c}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+\tilde{c}_n\boldsymbol{x}_n(t)\equiv 0,\qquad a\le t\le b$$

但$\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n$不全为零，这与$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$线性无关的假设矛盾．■

注 3.2 结合定理 3.2 和 3.3，可知方程组（3.1）的n个解$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式$W(t)$在区间$(a,b)$上只有两种可能：或者恒等于零，或者恒不为零.

进一步，有下列定理：

定理 3.4 线性微分方程组（3.1）的n个解$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\equiv W(t)$满足下面的一阶线性微分方程

$$W'=[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]W$$

进而有下面的**刘维尔公式**：

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\quad t_0,t\in(a,b)\ ,\tag{3.4}$$

这里$a_{ij}(t)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$为矩阵$\boldsymbol{A}(t)$的元素.

证 记$x_i=\begin{bmatrix}x_{1i}\\ \vdots\\ x_{ni}\end{bmatrix}(i=1,2,\cdots,n)$，则$W(t)=\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\ x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{vmatrix}$.

利用$x_{ij}'=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$及行列式的微分公式，有

$$W'(t)=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \cdots & x'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{kn} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{kn} \end{vmatrix}$$

对于第一行列式，根据行列式的性质，若从第二行开始把第k行个元素都乘以$-a_{1k}$（$2\le k\le n$）并都加到第一行，则第一个行列式的第一行变成$(a_{11}x_{11} \quad a_{11}x_{12} \quad \cdots \quad a_{11}x_{1n})$，其它行保持不变．对其它$(n-1)$个行列式，进行类似的处理．这样，有

$$W'(t)=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \cdots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \cdots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}\right)\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}=\left(a_{11}+a_{22}+\cdots a_{nn}\right)W$$

这是关于$W(t)$的一阶线性微分方程，其通解为

$$W(t)=ce^{\int_{t_0}^{t}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds},\quad t_0,t\in(a,b),\quad c\text{ 为任意常数.}$$

又当$t=t_0$时$W(t)=W(t_0)=c$，于是推得（3.4）．证毕．■

定理 3.5 齐次线性微分方程组（3.1）一定存在n个线性无关的解.

证 任取$t_0\in[a,b]$，由解的存在唯一性定理，齐次线性微分方程组（3.1）

必存在n个解$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$分别满足初值条件

$$\boldsymbol{x}_1(t_0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2(t_0)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n(t_0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

而这n个解$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$的朗斯基行列式$W(t)$满足$W(t_0)=1\neq 0$，根据定理3.2 和 3.3 知，$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是线性无关的．定理得证．■

注：这一定理只是理论上证明了n个线性无关解的存在性，但并没有具体给出这n个线性无关解．对于系数矩阵是常数矩阵情形，下一章将给出找n个线性无关解的具体方法.

定理 3.6（齐次线性微分方程组的通解结构）如$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$是方程组（3.1）的$n$个线性无关的解，则（3.1）的任一解$\boldsymbol{x}(t)$均可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t),$$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_n$为某些常数.

证　任取（3.1）的一解$\boldsymbol{x}(t)$及$t_0\in[a,b]$，令

$$\boldsymbol{x}(t_0)=c_1\boldsymbol{x}_1(t_0)+c_2\boldsymbol{x}_2(t_0)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t_0)$$

把上式看成以$c_1,c_2,\cdots,c_n$为未知量的线性代数方程组，则此方程组的系数行列式就是$W(t_0)$．因$\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$线性无关，由定理 3.3 知$W(t_0)\neq 0$．根据线性代数方程组理论，上式有唯一解$c_1,c_2,\cdots,c_n$，再依定理 3.2 (叠加原理)，由$c_1,c_2,\cdots,c_n$所构造的$c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$是方程组（3.1）的解．因所构

造的解的初值与 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 相同，依初值条件确定的解的存在唯一性定理知，由此所构造的解 $c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t)$ 即为 $\boldsymbol{x}(t)$．故定理成立. ■

推论 3.1 方程组（3.1）的线性无关解的最大个数为 n.

称（3.1）的 n 个线性无关解为（3.1）的一个**基本解组（基解组）**，它显然是不唯一的.

由定理 3.5 和 3.6 可知，方程（3.1）的所有解的集合构成一个 n 维线性空间.

用矩阵表示通解结构

如果一个 $n\times n$ 矩阵的每一列都是（3.1）的解，则称这个矩阵为（3.1）的**解矩阵**；若矩阵的列向量在 $a\le t\le b$ 上是线性无关的解矩阵称为（3.1）在 $a\le t\le b$ 上的**基解矩阵**．用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示由方程（3.1）的 n 个线性无关的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 作为列向量构成的矩阵，则 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵．特别是，当 $\boldsymbol{\Phi}(t_0)=\boldsymbol{E}$（为单位矩阵）时称为**标准基解矩阵**.

定理 3.5 和 3.6 可重新表述为:

定理 1*（齐次线性微分方程组的通解结构） 齐次线性微分方程组（3.1）一定存在基解矩阵；设 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是（3.1）的一个基解矩阵，则方程组（3.1）的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 均可表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}_n(t), \tag{3.5}$$

这里 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 为确定的 n 维常数列向量.

由定理 3.2 和 3.3 可得:

定理 2* 齐次线性微分方程组（3.1）的 n 个解 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)$ 组成的解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是基解矩阵的充分必要条件为 $\det\boldsymbol{\Phi}(t) \neq 0 \quad (a \leq t \leq b)$，其中 $\det\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的行列式.

注 3.2 行列式恒等于零并不表示矩阵的列向量线性相关．例如，矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式恒等于零，但其列向量却线性无关．由定理 2^* 知：此矩阵不可能是任一齐次线性微分方程组的解矩阵.

例 3.3 验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} & e^{4t} \\ -2e^{-t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

是方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x$$

的基本解阵.

证 首先证明 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是解矩阵．令 $\boldsymbol{\varphi}_1(t), \boldsymbol{\varphi}_2(t)$ 是 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的第一、二列，则

$$\boldsymbol{\varphi}_1'(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1(t)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_2'(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{4t} \\ 4e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2(t)$$

这表示$\varphi_1(t),\varphi_2(t)$均是方程的解，即$\Phi(t)=[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]$是方程的解矩阵.

其次，因$\det\Phi(t)=5e^{3t}\neq 0$，根据定理 2^*，知$\Phi(t)$是基解矩阵. ■

从定理 1*和定理 2*可以得到如下推论.

推论 1^* 如果$\Phi(t)$是齐次线性微分方程组（3.1）在区间$a\le t\le b$上的一个基解矩阵，C是非奇异$n\times n$常数矩阵，则$\Phi(t)C$也是方程组（3.1）在区间$a\le t\le b$上的基解矩阵. 换句话说，基解矩阵是不唯一的，但任意两个基解矩阵之间只相差一个非奇异的数量矩阵.

证 令

$$\Psi(t)=\Phi(t)C,\quad a\le t\le b$$

微分之，得

$$\Psi'(t)=\Phi'(t)C=A(t)\Phi(t)C=A(t)\Psi(t)$$

即$\Psi(t)$是方程组（3.1）的解矩阵.

又由C是非奇异的，有

$$\det\Psi(t)=\det\Phi(t)\cdot\det C\neq 0,\qquad a\le t\le b$$

由定理 2^*，$\Psi(t)$即$\Phi(t)C$是（3.1）的基解矩阵. ■

推论 2^* 方程组（3.1）的两个基本解组$\Phi(t)$、$\Psi(t)$必有关系

$$\Phi(t)=\Psi(t)C,\quad (a\le t\le b),\quad \det C\neq 0$$

证 因$\Phi(t)$为基解矩阵，其逆矩阵$\Phi^{-1}(t)$必存在. 现令

$$X(t)=\Phi^{-1}(t)\Psi(t),\quad a\le t\le b$$

则 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $n\times n$ 可微矩阵，且 $\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0\quad(a\le t\le b)$，于是由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)&=\boldsymbol{\Psi}'(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)\end{aligned}$$

得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{X}'(t)=0,\quad a\le t\le b$$

用 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 左乘之，有 $\boldsymbol{X}'(t)=0\quad(a\le t\le b)$，因此 $\boldsymbol{X}(t)$ 为常数矩阵，记为 $\boldsymbol{C}$，即

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C},\quad a\le t\le b$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$ 为非奇异 $n\times n$ 常数矩阵．推论 2*得证．■

3.1.2 非齐次线性微分方程组情形

上一节解决了齐次线性方程组的通解结构与知道了通解的性质之后，那么非齐次线性方程组通解的结构与某些性质就不困难了．

为了更好地帮助读者理解本小节的内容，先考察下列的例子．

例 3.4 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\-3 & -2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}\\0\end{pmatrix}$．

前面的例题 3.1 已经验证了下列两个函数向量

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}\cos 3t\\-e^{-2t}\sin 3t\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\begin{pmatrix}e^{-2t}\sin 3t\\e^{-2t}\cos 3t\end{pmatrix}$$

是相应齐次线性微分方程组的解．现在，进一步验证

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix}\sin 3t\\\cos 3t-1\end{pmatrix}$$

是非齐次线性微分方程的解．事实上，一方面有

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}\left[-2\begin{pmatrix}\sin 3t\\ \cos 3t-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}\cos 3t\\ -\sin 3t\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix}-2\sin 3t+3\cos 3t\\ 2-3\sin 3t-2\cos 3t\end{pmatrix}$$

另一方面，

$$\boldsymbol{A\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\sin 3t\\ \cos 3t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{-2t}\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix}-2\sin 3t+3\cos 3t\\ 2-3\sin 3t-2\cos 3t\end{pmatrix}$$

这表明$\boldsymbol{\varphi}(t)$的确是非齐次线性微分方程的一个解. 此外，读者不难验证：对任意两个常数c_1,c_2，线性组合

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{x}_1(t)+c_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{\varphi}(t)$$

也是非齐次线性微分方程的解.

这一例子的结果并不是偶然的. 事实上，有下列更一般的结果：

性质 3.1 如$\boldsymbol{\varphi}(t),\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$分别是方程组(3.1)与（3.2）的解，则$\boldsymbol{\varphi}(t)+\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是非齐次方程组(3.2)的解. 如$\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t)$均为方程组(3.2)的解，则$\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_2(t)$是齐次方程组（3.1）的解.

下面的定理是关于非齐次线性方程组的通解的结构.

定理 3.7（非齐次线性微分方程组的通解结构） 设$\boldsymbol{\Phi}(t)$是齐次线性微分方程组（3.1）的一个基解矩阵，$\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是非齐次方程组（3.2）的某一解（特解），则非齐次线性方程组（3.2）的任一解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$可表为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}+\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$$

其中$\boldsymbol{c}$是某个n维常数列向量.

证 由性质 3.1 知$\boldsymbol{\varphi}(t)-\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)$是方程组（3.1）的解，根据定理 1^* 知，存

在n维常数列向量$\boldsymbol{c}$使得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)-\bar{\boldsymbol{\varphi}}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}.$$

整理即得证. ■

定理 3.7 说明，为了得到非次齐线性微分方程组（3.2）的通解，需要知道方程（3.1）的一个基解矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)$和方程（3.2）的一个特解. 下面，介绍一种找非次齐线性方程组特解的一般性方法，只要知道方程（3.1）的一个基解矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)$即可得出方程（3.2）的特解，这种方法叫做**常数变易法**.

将方程组（3.1）的通解的结构式（3.5）$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$中的$\boldsymbol{c}$视为$t$的函数而作为方程组(3.2)的解：

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$$

代入(3.2)得

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t)$$

因$\boldsymbol{\Phi}(t)$为基解矩阵，其逆矩阵$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$必存在. 用$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$左乘上式

$$\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

再积分之

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,\quad t\in[a,b]$$

这里$\boldsymbol{c}(t_0)=0$. 于是得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,\quad t\in[a,b]$$

反之，如有上述形式的函数$\boldsymbol{\varphi}(t)$，则因

$$\boldsymbol{\varphi}'(t)=\boldsymbol{\Phi}'(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds+\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$$
$$=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds+\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)+\boldsymbol{f}(t)$$

知$\boldsymbol{\varphi}(t)$为方程(3.2)的解，且$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=0$．于是得

定理 3.8　如果$\boldsymbol{\Phi}(t)$是齐次方程组（3.1）的基解矩阵，则向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,\quad t\in[a,b]\tag{3.6}$$

是微分方程组（3.2）满足初值条件$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=0$的解.

读者不难显示出（看本节的习题 9）非齐次线性方程组(3.2)的满足初值条件$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$的解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,\quad t_0,t\in[a,b]\tag{3.7}$$

其中$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}$是方程组（3.1）满足初值条件$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$的解.

公式（3.6）或（3.7）称为非齐次线性微分方程组（3.2）的**常数变易公式**.

例 3.5　试求初值问题

$$x'=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix},\qquad x(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

的解.

解　由例 3.3 知，对应的齐次线性微分方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}3e^{-t} & e^{4t}\\ -2e^{-t} & e^{4t}\end{bmatrix}$$

现计算$\Phi(t)$的逆矩阵$\Phi^{-1}(t)$．有

$$\Phi^{-1}(s)=\frac{\begin{bmatrix}e^{4s} & 2e^{-s}\\ -e^{4s} & 3e^{-s}\end{bmatrix}}{5e^{3s}}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}e^{s} & 2e^{-4s}\\ -e^{s} & 3e^{-4s}\end{bmatrix}$$

先计算公式（3.7）右边的第一项．有

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3e^{-t} & e^{4t}\\ -2e^{-t} & e^{4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3e^{-t}+4e^{4t}\\ -2e^{-t}+4e^{4t}\end{bmatrix}$$

然后计算公式（3.7）右边的第一项．有

$$\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds=\begin{bmatrix}3e^{-t} & e^{4t}\\ -2e^{-t} & e^{4t}\end{bmatrix}\int_0^t\frac{1}{5}\begin{bmatrix}e^{s} & 2e^{-4s}\\ -e^{s} & 3e^{-4s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}ds$$
$$=\frac{t}{5}\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{4t}\\ -2e^{-t}-e^{4t}\end{bmatrix}$$

于是所求的解为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3e^{-t}+4e^{4t}\\ -2e^{-t}+4e^{4t}\end{bmatrix}+\frac{t}{5}\begin{bmatrix}3e^{-t}-e^{4t}\\ -2e^{-t}-e^{4t}\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3(1+t)e^{-t}+(4-t)e^{4t}\\ -2(1+t)e^{-t}+(4-t)e^{4t}\end{bmatrix}$$

3.1.3 常系数线性微分方程组情形

本小节将介绍下列齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{3.8}$$

的初值问题，以及非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\ \ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{3.9}$$

的初值问题，其中$\boldsymbol{A}$为常数矩阵．为此，需要介绍有关矩阵或向量的范数、

向量序列的收敛性等概念.

对于$n\times n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$和$n$维向量$\boldsymbol{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]^T$，定义它们的**范数**为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\ ,\quad \|\boldsymbol{A}\|=\sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \tag{3.10}$$

其中“sup”表示上确界. 注意到矩阵的范数是由向量的范数来定义的. 对于范数，有下列性质:

（1）（非负性）$\|\boldsymbol{A}\|\geq 0,\ \|\boldsymbol{x}\|\geq 0$，且若$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则$\|\boldsymbol{A}\|>0$，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；

（2）（数乘运算）$\|a\boldsymbol{A}\|=|a|\cdot\|\boldsymbol{A}\|,\quad \|a\boldsymbol{x}\|=|a|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$

（3）（三角不等式）$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|,\quad \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

（4）$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|,\quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\leq\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$；

这里$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是$n\times n$阶矩阵，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$是$n$维向量，$a$是一个实数. 应当指出的是，前三条性质实际是定义范数的一般要求（看任何一本泛函分析书），因此定义向量范数可有多种形式. 以上述方式定义的向量范数，常称为 2-范数.

向量序列$\{\boldsymbol{x}_k\}$（这里$\boldsymbol{x}_k=[x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{kn}]$）称为**收敛**的，如果其每个分量序列是收敛的，即对每个i（$i=1,2,\cdots,n$），数列$\{x_{ik}\}$都是收敛的. 类似地，向量函数序列$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$（这里$\boldsymbol{x}_k(t)=\left[x_{k1}(t),x_{k2}(t),\cdots,x_{kn}(t)\right]$）称为在区间$a\leq t\leq b$上**收敛**的（**一致收敛**的），如果其每个分量函数序列在区间$a\leq t\leq b$上是收敛的（一致收敛的），即对每个i（$i=1,2,\cdots,n$），函数数列$\{x_{ik}(t)\}$都在区间$a\leq t\leq b$上是收敛的（一致收敛的）. 不难证明，在区间$a\leq t\leq b$上的连续向量函数序列

$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$的一致收敛的极限向量函数也在区间$a \le t \le b$上是连续的.

向量函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$称为在区间$a \le t \le b$上是**收敛**的（**一致收敛**的），如果其部分和构成的向量函数序列在区间$a \le t \le b$上是收敛的(一致收敛的).

判别函数项级数一致收敛性的魏氏判别法对于向量函数项级数也是成立的，即如果

$$\|\boldsymbol{x}_k(t)\| \le M_k,\ a \le t \le b$$

且数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}M_k$是收敛的，则$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$在区间$a \le t \le b$上是一致收敛的.

积分号下取极限的定理对向量函数也成立，即如果连续的向量函数序列$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_k(t)$在区间$a \le t \le b$上是一致收敛的，则

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b \boldsymbol{x}_k(t)dt = \int_a^b \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}_k(t)dt\ .$$

注意，上述涉及向量序列的定义和结果，同样对矩阵序列也是成立的. 例如，$n \times n$阶矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$，其中$\boldsymbol{A}_k = \left[a_{ij}^{(k)}\right]_{n\times n}$，称为收敛的，如果对于一切$i,j = 1,2\cdots,n$，数列$\left\{a_{ij}^{(k)}\right\}$都是收敛的.

无穷矩阵级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k + \cdots$$

称为是收敛的，如果它的部分和所组成的序列是收敛的.

不难证明：如果对于每个整数k，有

$$\|\boldsymbol{A}_k\| \le \boldsymbol{M}_k$$

而级数$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$是收敛的，则矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k$也是收敛的.

同样,可给出无穷矩阵函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_k(t)$的一致收敛性的定义和有关结果.

总之,上述一切定义和结果都是数学分析课程中有关概念和结果的自然推广，证明也和数学分析的相关证明类似，请读者自己作为练习详细推演一遍.

特别是，矩阵函数项级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$在任意有限区间上是一致收敛的，而在无穷区间$(-\infty,\infty)$上是逐点收敛的. 事实上,对一切正整数$k$，当$|t| \le c$（$c$为某个正常数）时有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}\right\| \le \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k |t|^k}{k!} \le \frac{\|\boldsymbol{A}\|^k c^k}{k!}$$

而数值级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\boldsymbol{A}\| c)^k}{k!}$是收敛的，故$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|\boldsymbol{A}\| c)^k}{k!}$一致收敛. 因此，$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$收敛到一个矩阵. 参照纯量函数的表示，记其为

$$e^{\boldsymbol{A}t} \equiv \exp(\boldsymbol{A}t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!}$$

矩阵$\exp(\boldsymbol{A}t)$称之为**矩阵指数函数**.

例 3.6 求下列矩阵的指数函数:

对角矩阵(其中$a_k(k=1,2,\cdots,n)$为实常数，未写出的元素均为零)

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

解 由定义知

$$\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{bmatrix} a_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^2 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

$$+\begin{bmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{bmatrix}\frac{t^k}{2!}+\cdots=\begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n t} \end{bmatrix}$$

下面给出矩阵指数的**性质**

(a) 所有$n\times n$阶常数矩阵$\boldsymbol{A}$的矩阵指数都是收敛的，因而是一个确定的矩阵，特别地，零矩阵的指数矩阵为单位矩阵；

由定义可直接证明性质（a）.

(b) 矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$可交换，即$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$时有$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp\boldsymbol{A}\cdot\exp\boldsymbol{B}$；

证 利用绝对收敛级数的重排定理证明．由二项定理及$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$有

$$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^{k-l}}{(k-l)!}\right]$$

而由绝对收敛的乘法定理又有

$$\exp\boldsymbol{A}\cdot\exp\boldsymbol{B}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^j}{j!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\frac{\boldsymbol{A}^l}{l!}\cdot\frac{\boldsymbol{B}^{k-l}}{(k-l)!}\right]$$

比较上两式，即得$\exp(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\exp\boldsymbol{A}\cdot\exp\boldsymbol{B}$.

为帮助理解，考察矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$。因$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，后面两个矩阵可交换，于是得

$$\exp \boldsymbol{B}t=\exp\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}t\cdot\exp\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right]$$

又因$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，最后得

$$\exp \boldsymbol{B}t=\begin{bmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}t\right]=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

(c) $(\exp \boldsymbol{A})^{-1}$存在且$(\exp \boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$；

证 因$\boldsymbol{A}$与$-\boldsymbol{A}$可交换，取$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$，由性质(b)得

$$\exp \boldsymbol{A}\cdot\exp(-\boldsymbol{A})=\exp(\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}))=\exp \boldsymbol{0}=\boldsymbol{E}$$

于是$(\exp \boldsymbol{A})^{-1}=\exp(-\boldsymbol{A})$.

(d) 如$\boldsymbol{P}$为非奇异矩阵，即$\det \boldsymbol{P}\neq 0$，则$\exp(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}T)=\boldsymbol{P}^{-1}(\exp \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$.

证 有

$$\begin{aligned}\exp(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})&=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^k}{k!}=\boldsymbol{E}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}}{k!}\\&=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\exp \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

得证. ■

根据式（3.7）并结合本节的习题 1，我们获得下列定理:

定理 3.9 区间$(-\infty,\infty)$上常系数线性方程组的初值问题（3.8）和（3.9）

的解分别可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{\eta}\ ,\quad \boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{f}(s)ds \qquad (3.11)$$

而且，指数矩阵$e^{\boldsymbol{A}t}$是方程$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的标准基解矩阵.

习题 3.1

1. 试验证

(1) 函数向量$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$（这里$\boldsymbol{c}$是$n$维常数列向量，$\boldsymbol{A}$是$n\times n$阶常数矩阵）是齐次线性方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

的解.

(2) 函数矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2}{t^2} & \dfrac{2}{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

在任何不包含原点的区间$a\le x\le b$上的基解矩阵.

2. 求下列矩阵的 2-范数：

（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$；　　（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. 已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} t\sin t \\ -2\cos t \end{bmatrix},$$

(1) 试验证

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

是相应齐次线性方程组的基解矩阵;

(2) 试求原非齐次线性方程组满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的特解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$.

4. 求下列矩阵的指数函数矩阵

（1） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;（2） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{2}x_1(1+\cos 2t) - x_2\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2t\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right) + \dfrac{1}{2}x_2(1-\cos 2t) \end{cases}$$

（1）试验证它有一个特解 $x_1 = -\sin t,\ x_2 = \cos t$;

（2）求此方程组的通解.

6. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{t}x_1 - 2tx_2 + 2t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{t^3}x_1 + \dfrac{2}{t}x_2 - 3t^3 \end{cases}$$

其中$t>0$，

（1）试验证对应的齐次线性方程有一个特解$x_1=t^3, x_2=-t$；

（2）求原方程组的通解.

7. 试证非齐次线性方程组的叠加原理:

设$\boldsymbol{x}_1(t)$和$\boldsymbol{x}_2(t)$分别是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_1(t)$$
$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解，则$\alpha\boldsymbol{x}_1(t)\pm\beta\boldsymbol{x}_2(t)$是方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{f}_1(t)\pm\beta\boldsymbol{f}_2(t)$$

的解.

8. 设$\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{f}(t)$分别为区间$a\le t\le b$上连续的$n\times n$矩阵和n维列向量，则方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$存在且最多存在$n+1$个线性无关解.

9. 设$\boldsymbol{\Phi}(t)$是常系数方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的标准基解矩阵（即$\boldsymbol{\Phi}(0)$为单位矩阵），试证明

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0)$$

其中t_0为任意固定的实数.

10. 给定方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$$

这里$\boldsymbol{A}(t)$是区间$a\le x\le b$上的连续$n\times n$矩阵. 设$\boldsymbol{\Phi}(t)$为方程组的一个基解矩阵，n维向量函数$\boldsymbol{F}(t,x)$在$a\le x\le b, \|x\|<\infty$上连续，$t_0\in[a,b]$. 试证明初值问题

$$
\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{*}
$$

的唯一解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是积分方程组

$$
\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{F}(s, \boldsymbol{x}(s))ds \tag{**}
$$

的连续解；反之，(**) 的连续解也是初值问题(*)的解.

11．设 $\boldsymbol{A}(t)$ 是区间 $a \le x \le b$ 上连续的 $n \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为方程 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的基解矩阵，而 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 为其一解．试证：

（1）方程组 $\boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{y}$（称为原方程组的**伴随方程**）的任一解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}(t)$ 满足 $\boldsymbol{\psi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) =$ 常数；

（2）$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是伴随方程组的基解矩阵的充要条件是存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{\Psi}^T(t)\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{C}$.

§3.2　高阶线性微分方程的通解结构与性质

本节讨论二阶及二阶以上的线性微分方程（即高阶线性微分方程），包括以下两种类型：类型 I：高阶齐次线性微分方程

$$
\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \tag{3.12}
$$

类型 II：高阶非齐次线性微分方程

$$
\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t) \tag{3.13}
$$

其中 $a_i(t)$（$i = 1, 2\cdots, n$）和 $f(t)$ 都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数．方程（3.12）

叫做对应于方程（3.13）的齐次线性微分方程．主要介绍它们的通解的结构与性质，而常系数线性微分方程（即 $\boldsymbol{A}(t)$ 为常量矩阵）的有关结果可作为推论给出．此外，还介绍方程组（3.13）的解的常数变易公式.

显然，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是方程组（3.12）的一个解（叫做平凡解）．除这种平凡解外，更感兴趣的是非平凡解，以及通解的结构与性质.

在介绍有关知识之前，先考察下列的例子.

例 3.7 考察二阶线性微分方程：$x''+3x'+2x=t$.

显然，$x=0$ 是相应齐次线性微分方程的平凡解．读者容易验证下列两个非平凡函数

$$x_1(t)=e^{-t}\,,\quad x_2(t)=e^{-2t}$$

也是相应的齐次线性微分方程的解；而且，线性组合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$（其中 c_1 和 c_2 是任意常数）也是齐次线性微分方程的解；计算知行列式

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix}=-e^{-3t}$$

在 t 的任何区间上恒不为零.

读者不难验证：

$$x(t)=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\,,\quad x(t)=e^{-t}+\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\,,\quad x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\frac{t}{2}-\frac{3}{4}$$

都是非齐次线性微分方程的解，其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

此外，通过令 $x_1=x$，$x_2=x'$，则原方程变成下列线性微分方程组

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

这一例子的结果并不是偶然的．下面将给出方程（3.12）和方程（3.13）的解的更一般结果.

首先，根据第一章，n阶线性微分方程（3.13）可转化成下线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

而且，它们在下面的意义下是等价的：给定其中一个问题的解，则可以构造另一个问题的解．即纯量函数组

$$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$$

是n阶线性微分方程（3.13）的n个解当且仅当向量函数组

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1(t) = \left[x_1(t), x_1'(t), \cdots, x_1^{(n-1)}(t)\right]^T \\ \boldsymbol{x}_2(t) = \left[x_2(t), x_2'(t), \cdots, x_2^{(n-1)}(t)\right]^T \\ \qquad \cdots \\ \boldsymbol{x}_n(t) = \left[x_n(t), x_n'(t), \cdots, x_n^{(n-1)}(t)\right]^T \end{cases} \tag{3.14}$$

是相应微分方程组的的n个解.

其次，类似于齐次线性微分方程组的情形，有下列定理:

定理 3.1* (叠加原理) 假设方程组（3.12）有 k 个解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$，则它们的任意线性组合

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_kx_k(t)$$

也是方程组（3.12）的解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为任意常数.

第三，引进向量函数组（3.10）的**朗斯基行列式**为:

$$W(t)=W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

注意，在上面的行列式中，从第二行开始的各行均是由第一行元素逐次求导而得，即由第一行元素完全决定，因此也把（3.15）称为纯量函数组 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 的朗斯基行列式.

下面的定理给出了一组纯量函数组和相应的向量函数组之间的线性相关性关系，进而可利用朗斯基行列式来判别纯量函数组的线性相关性.

定理 3.10 一组 $n-1$ 次可微的纯量函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$ 线性相关的充分必要条件是向量函数组

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_m'(t) \\ \vdots \\ x_m^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

线性相关.

证　如果 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关，则存在不全为零的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0$$

将上式依次对 t 微分一次、二次直至 $n-1$ 次，得

$$c_1x_1'(t)+c_2x_2'(t)+\cdots+c_mx_m'(t)=0\ ,$$

$$c_1x_1''(t)+c_2x_2''(t)+\cdots+c_mx_m''(t)=0\ ,$$

……

$$c_1x_1^{(n-1)}(t)+c_2x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_mx_m^{(n-1)}(t)=0\ ,$$

即有

$$c_1\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_1'(t)\\\vdots\\x_1^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}x_2(t)\\x_2'(t)\\\vdots\\x_2^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}+\cdots+c_m\begin{bmatrix}x_m(t)\\x_m'(t)\\\vdots\\x_m^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}=0 \qquad (3.17)$$

于是，向量函数组(3.16)线性相关.

反之，如向量函数(3.16)线性相关，则存在不全为零的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得(3.17)式成立，自然有

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)=0,$$

即 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$ 线性相关．定理得证．■

由此可以看出，线性微分方程组与高阶线性微分方程密切相关，具有很多类似的性质，解法也类似，但前者比后者更具一般性．因此，根据上节线性微分方程组有关解的结构和解法，可把高阶线性微分方程相应的结果

以推论形式给出.

特别是，由定理 3.1 至定理 3.8 立即分别推得n阶线性微分方程（3.12）相应的结论，其中由定理 3.7 和定理 3.8 可得n阶齐次线性微分方程（3.12）的通解结构定理.

推论 3.2（高阶齐次线性微分方程的通解结构）

（1）n阶齐次线性微分方程（3.12）在区间$a \le t \le b$上存在n个线性无关解.

（2）如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是方程（3.12）的$n$个线性无关解，则方程（3.12）的任一解$x(t)$均可表示为

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)\,, \tag{3.18}$$

这里$c_1, c_2, \cdots, c_n$为相应的确定常数.

（3）当$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数时，式（3.18）即为方程（3.12）的通解.

证 (1) 由于相应的齐次线性微分方程组存在n个线性无关解，此n个解的第一个分量即为n阶齐次线性微分方程（3.12）的n个线性无关解.只需证明通解部分.

(2) 根据线性微分方程的叠加原理，直接验证可知方程(3.18)是方程(3.12)的解;另一方面,方程(3.12)的任一解均可唯一地确定一组$c_1, c_2, \cdots, c_n$.

（3）由定理 3.10 和定理 3.4 知：在区间$a \le t \le b$上有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial c_1} & \frac{\partial x_2}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial c_n} \\ \frac{\partial x_1'}{\partial c_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x_n'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial x_2^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} = W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)] \neq 0$$

因此，式（3.18） 的确是方程（3.8）的通解. ■

类似于方程组的情形，我们把n阶齐次线性微分方程（3.12）的n个线性无关解称为一个**基本解组**. 推论 3.2 肯定了（3.12）基本解组的存在性，而定理 3.10 和定理 3.4 告诉我们如何判断一个解组是否为基本解组?

下一步，我们来考虑非齐次线性微分方程（3.13）的通解结构. 根据定理 3.6 和定理 3.10，可得n阶非齐次线性微分方程（3.13）的解的结构定理和常数变易公式:

推论 3.3 （高阶非齐次线性微分方程的通解结构）

如果$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是齐次线性微分方程（3.12）在区间$a \le t \le b$上的一个基本解组，则$n$阶非齐次线性微分方程（3.13）的通解可表示为

$$u(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \varphi(t), \tag{3.19}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数，而

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{W_k[x_1(s), x_2(s) \cdots, x_n(s)]}{W[x_1(s), x_2(s) \cdots, x_n(s)]} \right\} f(s)ds \tag{3.20}$$

是微分方程（3.13）满足初始条件

$$\varphi(t_0)=0,\varphi'(t_0)=0,\cdots,\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,\quad t_0\in[a,b]$$

的解，这里 $W[x_1(s),x_2(s)\cdots,x_n(s)]$ 为由 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 组成的朗斯基行列式；W_k 为 W 的第 k 列以列向量 $(0,\cdots,0,1)^T$ 替换后得到的行列式，即

$$W_k=\begin{vmatrix} x_1(t) & \cdots & x_{k-1}(t) & 0 & x_{k+1}(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \cdots & x_{k-1}'(t) & 0 & x_{k+1}'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \cdots & x_{k-1}^{(n-1)}(t) & 1 & x_{k+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

证 对于与方程（3.12）和（3.13）分别等价的方程组（3.1）和（3.2），应用定理 3.8，得到相应于式（3.7）的公式，或

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0)\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,$$

其中基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 是由向量函数组（3.16）作为列向量所组成的．取上式中第一项的第一个分量，即得式（3.19）的第一部分，余下只需验证（3.7）中的向量函数

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

的第一个分量就是（3.20）．

事实上，根据相应（3.2）的方程组中 $\boldsymbol{f}(t)$ 的特殊性，我们有

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds=\int_{t_0}^{t}\frac{\boldsymbol{\Phi}(t)}{W(s)}\begin{bmatrix} * & \cdots & * & W_1(s) \\ * & \cdots & * & W_2(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & W_n(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{bmatrix}ds$$

这里，矩阵中的符号“*”表示无需写出的元素．根据矩阵与向量的乘积以及矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 的定义，我们知道

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds=\int_{t_0}^{t}\frac{f(s)}{W(s)}\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \\ \vdots \\ W_n(s) \end{bmatrix}ds$$

显然，上式中的第一个分量就是（3.20）．■

公式（3.20）称为高阶线性微分方程（3.13）的**常数变易公式**.

特别地,当 $n=2$ 时，因

$$W_1[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ 1 & x_2'(t) \end{vmatrix}=-x_2(t),\quad W_2[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & 1 \end{vmatrix}=x_1(t)$$

所以常数变易公式变为

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{x_2(t)x_1(s)-x_1(t)x_2(s)}{W[x_1(s),x_2(s)]}f(s)ds\,.$$

例 3.8　试求微分方程 $x''+x=\tan t$ 的一个解.

解　对应齐次方程 $x''+x=0$ 的基本解组为 $x_1(t)=\cos t, x_2(t)=\sin t$．直接利用公式（3.16），及由

$$W[x_1(t),x_2(t)]=\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}=1$$

并取 $t_0=0$，得

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\int_{t_0}^{t}(\sin t\cos s-\cos t\sin s)\tan s ds=\sin t\int_{t_0}^{t}\sin s ds-\cos t\int_{t_0}^{t}\sin s\tan s ds\\ &=\sin t(1-\cos t)+\cos t(\sin t-\ln|\sec t+\tan t|)=\sin t-\cos t\ln|\sec t+\tan t|\end{aligned}$$

这是原方程的一个解.

注意，因 $\sin t$ 是对应齐次方程的一个解，故函数

$$\bar{\varphi}(t) = -\cos t \ln\left|\sec t + \tan t\right|$$

也是原方程的一个解.

习题 3.2

1. 已知 n 阶齐次线性微分方程（3.12）的 n 个线性无关解 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，试给出计算此方程满足初始条件 $x(t_0)=\eta_1, x'(t_0)=\eta_2, \cdots, x^{(n-1)}(t_0)=\eta_n$ 的特解公式.

2. 证明高阶非齐次线性微分方程的叠加原理：设 $x_1(t), x_2(t)$ 分别是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_1(t),$$
$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = f_2(t)$$

的解，则 $c_1x_1(t) \pm c_2x_2(t)$ 是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t)$$

的解，其中 c_1, c_2 是任意常数.

3. 已知齐次线性微分方程的基本解组 x_1, x_2，求下列方程对应的非齐次线性微分方程的通解：

（1） $x'' - 9x = t\sin t$，已知 $x_1 = e^{3t}, x_2 = e^{-3t}$；

（2） $x'' - \left(1 - \dfrac{1}{1-t}\right)x' - \dfrac{1}{1-t}x = (t-1)e^t$，已知 $x_1 = t, x_2 = e^t$；

（3） $x'' + x = t\cos t$，已知 $x_1 = \cos t, x_2 = \sin t$；

（4） $t^2x'' - tx' + x = -2t$，已知 $x_1 = t, x_2 = t\ln t$.

4. 已知线性微分方程 $x''+3x'+2x=0$ 有基本解组 e^{-t},e^{-2t}，试求此方程适合初值条件 $x(0)=1,x'(0)=0$ 及 $x(0)=0,x'(0)=1$ 的基本解组(称为标准基本解组，即有 $W(0)=1$)，并由此求出方程的适合初值条件 $x(0)=x_0,x'(0)=x_0'$ 的解.

5. 若 $a_1(t),a_2(t)$ 于区间 $[a,b]$ 上连续，假设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$$

的解，试证：

（1） $x_2(t)$ 为方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1(t)W[x_1,x_2]=0$$

(2) 方程的通解可表为

$$x=x_1\left[c_1\int\frac{1}{x_1^2}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}a_1(s)ds\right)dt+c_2\right]$$

其中 c_1,c_2 为任意常数， $t_0,t\in[a,b]$.

(3) 试求微分方程： $x''+tx-t=0$ 的通解.

6. 试证：n 阶非齐次线性微分方程（3.13）存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解.

7. 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是区间 $a\le t\le b$ 上的连续函数，证明：如果在区间 $a\le t\le b$ 上有 $\dfrac{x(t)}{y(t)}\neq$ 常数或 $\dfrac{y(t)}{x(t)}\neq$ 常数，则 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上线性无关.

8. 试证：n 阶齐次线性微分方程（3.12）的所有解组成一个 n 维向量空间.

第四章 基本解组与特解

第三章解决了线性微分方程的通解的结构问题,无论是对齐次线性方程组还是非齐次线性方程组，通解结构均依赖于某个基解矩阵，但到目前为止,并没有任何方法给出基解矩阵的具体表达．一般地，对于变系数线性微分方程，很难找到它们的基解矩阵，但对常系数线性微分方程，找基解矩阵的问题已经彻底解决．本章介绍找常系数线性微分方程的基解矩阵与找非齐次线性微分方程的特解的若干方法．此外,还介绍高阶线性微分方程的降阶法与幂级数法，目的本质上也是为了找基本解组或特解.

§4.1 常系数线性微分方程组的解法

为了帮助读者的理解，先考察一阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=0$$

的解法及解的形式．显然，它有形如$x=ce^{-at}$的通解，其中c为任意常数．现在，把它推广到常系数齐此微分方程组的情形．考虑n阶常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{4.1}$$

其中$\boldsymbol{A}$为$n\times n$常数矩阵．受一阶常系数线性微分方程的通解形式的启示，寻求常系数齐次线性方程组(4.1)形如

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{c}\ ,\quad \boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

的解，其中$\boldsymbol{c}$是n维常数列向量．将（4.2）代入（4.1)，得到

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{c},$$

因$e^{\lambda t}\neq 0$，所以上式变为

$$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=0 \tag{4.3}$$

这表明$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$是(4.2)的解的充分必要条件就是常数$\lambda$和向量$\boldsymbol{c}$满足(4.3). 根据线性代数知识，齐次线性代数方程组（4.3）有非零解的充分必要条件是

$$P(\lambda)\equiv\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0. \tag{4.4}$$

这样，$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$是（4.1）的解的充分必要条件是：$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的特征值，且向量$\boldsymbol{c}$为对应于特征值$\lambda$的特征向量.

一般地，对于$n\times n$阶(实)常数矩阵$\boldsymbol{A}$，n次多项式

$$P(\lambda)\equiv\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$$

称为$\boldsymbol{A}$的**特征多项式**. n次代数方程$P(\lambda)=0$称为$\boldsymbol{A}$的**特征方程**，亦称为线性微分方程组（4.1）的特征方程. 特征方程的根λ称为**特征值**或**特征根**，而线性代数方程组$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=0$的**非零解$\boldsymbol{u}$**称为对应特征值$\lambda$的**特征向量**.

根据代数基本定理，n次特征方程$P(\lambda)=0$有n个根（包括重根）. 如果$\lambda=\lambda_0$是特征方程的单根，则称λ_0为**简单特征根**；如果$P(\lambda)$含因子$(\lambda-\lambda_0)^k$而不含因子$(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$，则称特征值$\lambda_0$为$k$**重根**. 特征值$\lambda_0$可以是实的，也可以是复的. 当$\lambda_0$为复数时，则其共轭复数$\overline{\lambda_0}$也是特征值.

定理 4.1 矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t$是常系数线性方程组（4.1）的一个基本解矩

阵，且$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{E}$（单位矩阵），方程组（4.1）的任一解可表为$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}$的形式，其中$\boldsymbol{c}$为任意$n$维常数列向量.

证　显然，$\boldsymbol{\Phi}(0)=\exp \boldsymbol{0}=\boldsymbol{E}$，且

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)=\left(\exp \boldsymbol{A}t\right)'=\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2t}{1!}+\frac{\boldsymbol{A}^3t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^{k+1}t^k}{k!}+\cdots=\boldsymbol{A}\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t),$$

即$\boldsymbol{\Phi}(t)$是方程组（4.1）的解矩阵，而$\det \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{0})=\det \boldsymbol{E}=1\neq 0$，得$\boldsymbol{\Phi}(t)$是基解矩阵.

由第三章基本解矩阵的性质，知方程组（4.1）的任一解可表为$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}$，定理证毕. ■

定理 4.1 说明，$\exp \boldsymbol{A}t$是方程组（4.1）的一个基本解矩阵，且其任一解可表为$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{c}$.这样，方程组（4.1）的求解问题似乎已经解决了，但是$\exp \boldsymbol{A}t$是由$\boldsymbol{A}t$的矩阵级数定义的，这个矩阵的元素是什么并没有具体给出．下面，利用线性代数的基本理论，仔细地讨论$\exp \boldsymbol{A}t$的计算方法，从而解决常系数线性方程组的基本解矩阵的结构问题.

下面，介绍一种计算$\exp \boldsymbol{A}t$的方法：

特征向量分解法

这种方法需要用到根子空间的某些性质．设$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$是矩阵$\boldsymbol{A}$的不同特征值，它们的重数分别为$n_1,\cdots,n_k$且$n_1+\cdots+n_k=n$；记所考虑数域（$\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$）上的$n$维常数列向量组成的线性空间为$\boldsymbol{U}$. 根据线性代数理论，对应于特征

值的λ_j特征向量以及零向量一起构成$\boldsymbol{U}$的一个子空间，称之为对应于特征值λ_j的**特征子空间**，记为$E_{\lambda_j}(\boldsymbol{A})$，不混淆时可简记为$E_j$，$\dim E_{\lambda_j}(\boldsymbol{A}) \le n_j$，$j=1,\cdots,k$．线性代数方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=0, \quad j=1,\cdots,k$$

的解的全体构成$\boldsymbol{U}$的一个子空间$U_j(j=1,\cdots,k)$，此时$\dim U_j=n_j$ $(j=1,\cdots,k)$且

$$\boldsymbol{U}=U_1\oplus U_2\oplus\cdots\oplus U_k. \tag{4.5}$$

我们称U_j为对应于特征值λ_j的**根子空间**$U_j(j=1,\cdots,k)$．

给定矩阵$\boldsymbol{A}$的任何k个不同特征值所对应的k个特征向量是线性无关的．因此，如果$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$具有n个不同特征值，则所对应的n个特征向量就构成$\boldsymbol{U}$的一组基.

以下区分两种情形来讨论给出基本解矩阵的方法.

情形一：矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化

当矩阵$\boldsymbol{A}$只有简单特征值时，有

定理 4.2　如果$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$具有n个不同特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，则方程组（4.1）的基本解矩阵可表为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1,e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n], \quad (-\infty\le t\le\infty),$$

且有

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0). \tag{4.6}$$

证　因每一个向量函数$e^{\lambda_j t}\boldsymbol{v}_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$都是（4.1）的一个解，故矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\left[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n\right]$$

是（4.1）的一个解矩阵. 而由特征向量$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$线性无关得

$$\det\boldsymbol{\Phi}(0)=\det[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\neq 0$$

根据第三章的定理 2*，知$\boldsymbol{\Phi}(t)$是方程组（4.1）的基解矩阵.

因$\boldsymbol{\Phi}(t)$和$\exp\boldsymbol{A}t$都是方程组（4.1）的基本解矩阵，由第三章的定理 2*，存在非奇异常数矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{C}$. 当取$t=0$时有$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\Phi}(0)\boldsymbol{C}$，即$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$. 于是有

$$\exp\boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$$

定理证毕. ■

定理 4.2 可推广到下列情形：矩阵$\boldsymbol{A}$具有n个线性无关特征向量，即对应于每个特征值的特征子空间的维数等于该特征值的重数. 事实上，我们有:

定理 4.3 如A有n个线性无关特征向量$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，它们对应的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ (可以重复)，则方程组（4.1）的基本解矩阵可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n], \quad (-\infty\le t\le\infty),$$

且有式（4.6）.

注 4.1 一般来说,定理 4.2 或 4.3 中的基本解矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)$不一定就是$\exp\boldsymbol{A}t$，也不一定是实矩阵. 但如果$\boldsymbol{A}$是实矩阵, 那么$\exp\boldsymbol{A}t$也是实矩阵. 因此, 当$\boldsymbol{A}$是实矩阵时，公式（4.6）就给出了一个构造实的基本解矩阵的方法.

不过，由于在公式（4.6）中需要计算逆矩阵$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)$，这在应用上并不是太方便（特别当$n$较大时）．实际上，根据第一章的内容，我们从一对共轭的复值解可以得到两个实值解，即对应的实部和虚部．而且不难看出，用这种方法可以把解矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)$中的所有复值解换成实值解，最后得到n个线性无关的实值解和一个实的基本解矩阵.

例 4.1　试求方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的基本解矩阵及$\exp \boldsymbol{A}t$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

解　不难求得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_{1,2}=3\pm 5i$，特征向量为

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性无关．由定理 4.3，方程组$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的基本解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\left[e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}\right]=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & i\,e^{(3-5i)t} \\ i\,e^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}$$

且有

$$\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & i\,e^{(3-5i)t} \\ i\,e^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} & i\,e^{(3-5i)t} \\ i\,e^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} & -i\,(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) \\ i\,(e^{(3+5i)t}-e^{(3-5i)t}) & e^{(3+5i)t}+e^{(3-5i)t} \end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}.$$

另解：上面的$\boldsymbol{\Phi}(t)$中的第一列

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)t} \\ i\,e^{(3+5i)t} \end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{bmatrix}+ie^{3t}\begin{bmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{bmatrix}$$

是一个复值解，它的实部和虚部是两个线性无关的实值解．由此得到一个实

的基解矩阵

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\Psi}(0)=\boldsymbol{E}$ ，所以 $\exp \boldsymbol{A}t=\boldsymbol{\Psi}(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}.$

注：为了避免求特征值、特征向量、逆矩阵、矩阵乘法等复杂运算，可采用下列更简单方法求得指数矩阵。由原方程组可得常系数线性微分方程：$x_2''-6x_2'+34x_2=$ ，由此可求得通解为（看下节内容）：$x_2=e^{3t}\left(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t\right)$。又 $x_1=\frac{1}{5}\left(3x_2-x_2'\right)$，因此可得 $x_1=e^{3t}\left(c_1\sin 5t-c_2\cos 5t\right)$。选取两组初始条件：$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$；$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$，由此确定两组 c_1 和 c_2，相应的两组特解记为 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{x}_2(t)$。这样，可求得相同的指数矩阵：

$$\exp \boldsymbol{A}t=\left[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)\right]=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}.$$

注意，上面的 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 中的第一列 $e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}$ 的共轭虽没有在 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 中出现，其实它与第二列 $e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}$ 只差一个因子 $-i$.

情形二：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化

即当对应于某个特征值的特征子空间的维数小于该特征值的重数（即有关矩阵不可对角化）时，需要考虑该特征值的根子空间. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值，它们的重数分别为 $n_1,\cdots,n_k$ 且 $n_1+\cdots+n_k=n$. 根据（4.5），对于 n 维欧几里得空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的每一个向量 $\boldsymbol{\eta}$ ，存在唯一的一组向量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k$ ，使得

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{u}_1+\cdots+\boldsymbol{u}_k, \tag{4.7}$$

其中$\boldsymbol{u}_j \in U_j (j=1,\cdots,k)$，也即$\boldsymbol{u}_j$为$(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j}\boldsymbol{u}=0$的解．于是

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^l \boldsymbol{u}_j=0, \quad l \ge n_j, \quad j=1,\cdots,k.$$

利用上式可证明:

定理 4.4　常系数齐次线性方程组（4.1）满足初始条件$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$的解可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})^i\right]\boldsymbol{u}_j, \tag{4.8}$$

其中$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{u}_j \in U_j (j=1,\cdots,k)$满足（4.7）．而

$$\exp \boldsymbol{A}t=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{E}=[(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2,\cdots,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n]$$

中的每一列可在（4.8）式依次取初始向量$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_n$得到，这里$\boldsymbol{e}_i$为仅在第$i$位为 1 其余位为 0 的$n$维列向量.

当矩阵$\boldsymbol{A}$仅有一特征值λ时，则有

$$\exp \boldsymbol{A}t=e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^i. \tag{4.9}$$

证　易计算对角阵的矩阵指数，于是

$$e^{\lambda_j t}\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)=e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} e^{-\lambda_j t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_j t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda_j t} \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$$

由上式及

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^l \boldsymbol{u}_j=0, \quad l \ge n_j, \quad j=1,\cdots,k$$

得

$$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{u}_j=(\exp \boldsymbol{A}t)e^{\lambda_j t}[\exp(-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{u}_j=e^{\lambda_j t}[\exp(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E}t)]\boldsymbol{u}_j$$

$$=e^{\lambda_j t}\left[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})+\frac{t^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^2+\cdots+\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E})^{n_j-1}\right]\boldsymbol{u}_j.$$

根据（4.7）知，方程组（4.1） 满足初始条件$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$的解可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{\eta}=(\exp \boldsymbol{A}t)\sum_{j=1}^{k}\boldsymbol{u}_j=\sum_{j=1}^{k}(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{u}_j=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})^i\right]\boldsymbol{u}_j.$$

因此，方程组（4.1）的满足初值条件$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$的解$\boldsymbol{\varphi}(t)$可写成

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k}e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})^i\right]\boldsymbol{v}_j$$

为从（4.6）中得到$\exp \boldsymbol{A}t$，依次取初始向量$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_n$求得$n$个解$(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_1,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_2,\cdots,(\exp \boldsymbol{A}t)\boldsymbol{e}_n$作为列组成矩阵即可.

当矩阵A仅有一特征值λ时，无需分解初始向量，对任何向量$\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{R}^n$均有

$$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^n\boldsymbol{u}=0\ ,$$

即$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^n$是一个零矩阵，由$\exp \boldsymbol{A}t$的定义得

$$\exp \boldsymbol{A}t=e^{\lambda t}\exp(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})t=e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E})^i.$$

定理证毕. ■

例 4.2 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$，试解初值问题$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$，并求$\exp \boldsymbol{A}t$.

解 不难验证$\lambda=3$是矩阵$\boldsymbol{A}$的二重特征值，这时$n_1=2$，只有一个子空间U_1.

将$n_1=2$及$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$代入公式（4.8）得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=e^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]\boldsymbol{\eta}=e^{3t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=e^{3t}\begin{bmatrix}\eta_1+t(-\eta_1+\eta_2)\\ \eta_2+t(-\eta_1+\eta_2)\end{bmatrix}$$

利用公式（4.6）有

$$\exp\boldsymbol{A}t=e^{3t}[\boldsymbol{E}+t(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})]=e^{3t}\left(\boldsymbol{E}+t\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}.$$

亦可取$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，分别代入解式$\boldsymbol{\varphi}(t)$，同样可得

$$\exp\boldsymbol{A}t=e^{3t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}.$$

这一例子亦可用上例题的注中的方法更简单地求得指数矩阵.

根据第三章定理 3.8 中非齐次线性微分方程组（3.2）的常数变易公式（3.7），有

定理 4.5 非齐次线性微分方程组（4.2）满足初值条件为$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$时的解有常数变易公式

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f}(s)ds\,. \tag{4.10}$$

证 由基解矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\boldsymbol{A}t$知

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp(-\boldsymbol{A}s),\quad \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s)=\exp[(t-s)\boldsymbol{A}]$$

故初值条件为$\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$时有

$$\boldsymbol{\varphi}_\eta(t)=\exp[(t-t_0)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{\eta}$$

代入（3.28）可得（4.10）. ■

例 4.3 设

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{bmatrix},\quad f(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$$

试求方程 $x'=Ax+f(t)$ 满足初值条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$.

解 由例 4.1 知

$$\exp At=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}$$

取 $t_0=0$ 代入公式（4.10），得

$$\varphi(t)=e^{3t}\begin{bmatrix}\cos 5t & \sin 5t\\ -\sin 5t & \cos 5t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\int_{t_0}^{t}e^{3(t-s)}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s) & \sin 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s) & \cos 5(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\ 0\end{bmatrix}ds$$

$$=e^{3t}\begin{bmatrix}\sin 5t\\ \cos 5t\end{bmatrix}+e^{3t}\int_{t_0}^{t}e^{-4s}\begin{bmatrix}\cos 5(t-s)\\ -\sin 5(t-s)\end{bmatrix}ds$$

应用分部积分法可得

$$\int_{t_0}^{t}e^{-4s}\cos 5s\,ds=\frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\cos 5s+5\sin 5s)\Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$\int_{t_0}^{t}e^{-4s}\sin 5s\,ds=\frac{e^{-4s}}{16+25}(-4\sin 5s-5\cos 5s)\Big|_{s=0}^{s=t}$$

最后得

$$\varphi(t)=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\ 46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

习题 4.1

1. 试证：方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时趋于零解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$.

2. 试证：如果 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 满足初值条件 $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解，那么

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=[\exp \boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{\eta}.$$

2. 试求齐次线性微分方程组 $x'=Ax$ 的基解矩阵，并求 $\exp At$，其中 A 分别为：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 3\\ 4 & -4 & 2\end{bmatrix}$；(3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

3. 试求齐次线性微分方程组 $x'=Ax$ 的基解矩阵，并求满足初值条件 $\varphi(0)=\eta$ 的解 $\varphi(t)$：

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，$\eta=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$；(2) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$，$\eta=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$.

4. 试求方程组 $x'=Ax+f(t)$ 满足初始条件的特解 $\varphi(t)$，其中，

(1) $\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}te^t\\ -1\end{bmatrix}$；

(2) $\varphi(0)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 8 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\\ t\end{bmatrix}$；

(3) $\varphi(0)=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，$f(t)=\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$.

5. 假设 m 不是矩阵 A 的特征值，试证：非齐次线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}e^{mt}$$

有形如

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{p}e^{mt}$$

的解，其中 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{p}$ 是常数列向量.

6. 给定线性系统：$\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$，其中 $t \geq 0$，$A(t) \in R^{n \times n}$ 是连续的，试证明:

$$\| x(0) \|_2 \exp\left(\int_0^t \gamma(s) ds\right) \leq \| x(t) \|_2 \leq \| x(0) \|_2 \exp\left(\int_0^t \Lambda(s) ds\right)$$

其中 $\| \bullet \|_2$ 表示 Euclead 范数，$\gamma(t)$ 和 $\Lambda(t)$ 分别是 $\frac{1}{2}\left(A(t) + A^T(t)\right)$ 的最小、最大特征值。

§4.2　高阶常系数线性微分方程的解法

4.2.1　求基本解组的特征根法

前面讨论了高阶线性微分方程的解的结构，需要知道其基本解组，但没有给出计算基本解组的方法. 本小节将给出计算高阶常系数线性微分方程的解的方法.

下面讨论常系数齐次线性微分方程

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \tag{4.11}$$

的求解问题. 显然，方程（4.11）的解“等价” 于下列常系数齐次线性方程组

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{4.12}$$

的解，其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}. \tag{4.13}
$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$
\det\left[\lambda E-\boldsymbol{A}\right]=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_1 \end{vmatrix} \tag{4.14}
$$

$$
=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n
$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$
\det\left[\lambda E-\boldsymbol{A}\right]=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \tag{4.15}
$$

这恰是在微分方程（4.11）中把 $x^{(k)}$ 分别换成 $\lambda^k(k=0,1,\cdots,n)$（或把 $x(t)$ 换成 $e^{\lambda t}$）所得的代数方程. 因此，代数方程（4.15）也称为微分方程（4.11）的**特征方程**，特征方程的根 λ 称为**特征根**.

可直接通过寻求方程（4.11）的指数函数 $x=e^{\lambda t}$ 形式的解来给出该方程的基本解组.

事实上，把 $x=e^{\lambda t}$ 代入方程（4.11）的左端可得

$$
L[e^{\lambda t}]\equiv\frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}e^{\lambda t}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{de^{\lambda t}}{dt}+a_n e^{\lambda t}\equiv F(\lambda)e^{\lambda t}
$$

其中， $F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 即是方程（4.15）的特征方程. 这样，$x=e^{\lambda t}$ 为方程（4.11）的解的充要条件是 λ 是其特征根. 下面，根据特征根的

不同情况分别进行讨论.

（1）λ 为单实根时，方程（4.11）有如 $e^{\lambda t}$ 形式的解.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是特征方程(4.15)的 n 个相异的实根，则相应的微分方程（4.11）有 n 个解

$$e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t} \tag{4.16}$$

因 $\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$，所以行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$=e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

即 n 个解（4.16）在区间 $a \le t \le b$ 上线性无关，构成方程（4.11）的一个基本解组. 于是，方程（4.11）有通解

$$x=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

（2）特征方程有单复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$. 因方程的系数为实数，复根将成对共轭地出现，即 $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=\alpha-i\beta$ 也是特征根，此时方程（4.11）有两共轭复值解

$$e^{\lambda_1 t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$$

$$e^{\lambda_2 t}=e^{\bar{\lambda}_1 t}=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$$

根据第一章，它们的实部和虚部也是方程的解，因此方程有对应的两实值解：

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t$$

（3）特征根有重实根的情形．当 $\lambda=\lambda_1$ 为 k 重实根时，它表示为

$$F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0,\quad F^{(k)}(\lambda_1)\neq 0$$

当 k 重实根 $\lambda_1=0$ 时，特征方程有因子 λ^k，于是

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k-1}=0$$

即特征方程的形式为

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0$$

对应的微分方程（4.11）为

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^k x}{dt}=0$$

易见它有 k 个解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$，且它们是线性无关的．因此特征方程的 k 重零根对应微分方程（4.11）的 k 个线性无关的解 $1,t,t^2,\cdots,t^{k-1}$．

当 k 重实根 $\lambda_1\neq 0$ 时，作变量变换 $x=ye^{\lambda_1 t}$，因

$$x^{(m)}=(ye^{\lambda t})^{(m)}=e^{\lambda_1 t}\left[y^{(m)}+m\lambda_1 y^{(m-1)}+\frac{m(m-1)}{2!}\lambda_1^2 y^{(m-2)}+\cdots+\lambda_1^m y\right]$$

则有

$$L[ye^{\lambda_1 t}]=\left(\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y\right)e^{\lambda_1 t}=L_1[y]e^{\lambda_1 t}.$$

于是微分方程（4.11）化为

$$L_1[y] \equiv \frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \tag{4.17}$$

其中$b_1, b_2, \cdots, b_n$仍为常数．相应的特征方程为

$$G(\mu) \equiv \mu^n + b_1 \mu^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \mu + b_n = 0 \tag{4.18}$$

直接计算易得

$$F(\mu + \lambda_1) e^{(\mu+\lambda_1)t} = L[e^{(\mu+\lambda_1)t}] = L_1[e^{\mu t}] e^{\lambda_1 t} = G[\mu] e^{(\mu+\lambda_1)t}$$

即

$$F(\mu + \lambda_1) = G[\mu]$$

且

$$F^{(j)}(\mu + \lambda_1) = G^{(j)}[\mu], \qquad j = 1, 2, \cdots, k$$

因此特征方程$F(\lambda) = 0$的根$\lambda = \lambda_1$对应于（4.18）的根$\mu = \mu_1 = 0$，且重数相同．问题化为已讨论的情形.

已知特征方程（4.18）的k_1重根$\mu_1 = 0$对应于微分方程（4.17）的k_1个解$1, t, t^2, \cdots, t^{k-1}$．因此，对应于特征方程$F(\lambda) = 0$的$k_1$重根$\lambda = \lambda_1$，微分方程（4.11）有$k_1$个解

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \tag{4.19}$$

同样，假设特征方程$F(\lambda) = 0$的其它根$\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_m$的重数依次为$k_2, k_3, \cdots, k_m \ (k_i \geq 1)$，且$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$，则微分方程(3.53)对应地有解

$$\begin{cases} e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, t^2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \cdots\cdots \\ e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, t^2 e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{cases} \tag{4.20}$$

进一步，将证明（4.19）和（4.20）的全体 n 个解构成微分方程(3.53)的基本解组. 用反证法，假设这些函数线性相关，则有

$$\sum_{r=1}^{m}(A_0^{(r)} + A_1^{(r)} t + \cdots + A_{k_r-1}^{(r)} t^{k_r-1}) e^{\lambda_r t} = \sum_{r=1}^{m} P_r(t) e^{\lambda_r t} = 0 \tag{4.21}$$

其中 $A_j^{(r)}$ 为不全为零的常数. 不失一般性，设多项式 $P_m(t)$ 不恒为零. 将上式除以 $e^{\lambda_1 t}$，得

$$\left(A_0^1 + A_1^1 t + \cdots + A_{k_1-1}^1 t^{k_1-1}\right) + \sum_{r=2}^{m} P_r(t) e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} = 0,$$

并对 t 微分 k_1 次得

$$\sum_{r=2}^{m} Q_r(t) e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} = 0 \tag{4.22}$$

其中 $Q_r(t) = (\lambda_r - \lambda_1)^{k_1} P_r(t) + S_r(t), S_r(t)$ 为次数低于 $P_r(t)$ 的次数的多项式. 因此，$Q_r(t)$ 与 $P_r(t)$ 次数相同，且 $Q_m(t)$ 不恒为零. 等式（4.22）与（4.21）类似，但项数减少了. 进一步对（4.22）施于同样手续，除以 $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ 并微分 k_2 次，则得到项数更少且类似(4.21)的多项式. 继续经 $m-1$ 次后将得到等式

$$R_m(t) e^{(\lambda_m-\lambda_{m-1})t} = 0$$

这不可能，因为 $R_m(t)$ 与 $P_m(t)$ 有同样次数且 $R_m(t)$ 不恒为零. 事实上可直接计算得

$$R_m(t)=(\lambda_m-\lambda_1)^{k_1}(\lambda_m-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda_m-\lambda_{m-1})^{k_{m-1}}P_m(t)+W_m(t)$$

其中$W_m(t)$是次数低于$P_m(t)$的次数的多项式. 这就证明了（4.19）和（4.20）的全部n个解构成微分方程（4.11）的一个基本解组.

（4）$\lambda=\alpha+i\beta,\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$为$k$重共轭复根时，微分方程（4.11）有$k$对共轭复值解

$$e^{\lambda t},e^{\bar{\lambda}t},te^{\lambda t},te^{\bar{\lambda}t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t},t^{k-1}e^{\bar{\lambda}t}$$

或对应的$2k$对实值解:

$$\begin{aligned}&e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad\cdots\quad,\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t\\&e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad\cdots\quad,\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t\end{aligned}$$

类似的，对含有单实根、共轭复根、重实根及重共轭复根的混合情形，可由前面讨论过的情形分别进行处理，求得每个特征根对应于微分方程的解，且这些解是线性无关的. 当所有解的个数总和为微分方程的次数n时，这些解构成微分方程的一个基本解组.

例 4.4 求解方程$\dfrac{d^3x}{dt^3}+8x=0$.

解 特征方程$\lambda^3+8=0$有根$\lambda_1=-2,\lambda_{2,3}=1\pm 2i$. 因此，通解为

$$x=c_1e^{-2t}+e^t\left(c_2\cos 2t+c_3\sin 2t\right)$$

其中c_1,c_2,c_3为任意常数.

例 4.5 求方程$\dfrac{d^3x}{dt^3}-6\dfrac{d^2x}{dt^2}+12\dfrac{dx}{dt}-8x=0$的通解.

解　特征方程 $\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=(\lambda-2)^3=0$ 的根为三重根 $\lambda=2$．因此方程有通解

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{2t}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

例 4.6 求解方程 $\frac{d^4x}{dt^4}+4\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$.

解　特征方程 $\lambda^4+4\lambda^2+4=(\lambda^2+2)^2=0$ 有两个二重根 $\lambda=\pm i\sqrt{2}$．方程有四个实值解

$$\cos\sqrt{2}t,\quad t\cos\sqrt{2}t,\quad \sin\sqrt{2}t,\quad t\sin\sqrt{2}t$$

方程有通解

$$x=(c_1+c_2t)\cos\sqrt{2}t+(c_3+c_4t)\sin\sqrt{2}t$$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数.

欧拉方程

形如

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{4.23}$$

的方程称为**欧拉方程，**其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实常数．欧拉方程的求解问题可归结为常系数方程的求解问题.

事实上，引进自变量变换 $x=e^t,t=\ln x$ 或 $t=\ln x$，则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

由数学归纳法可证对一切自然数 k 有关系式

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 为常数．于是

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}=\frac{d^ky}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}.$$

将上关系式代入方程（4.23），得到常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0 \qquad (4.24)$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为常数．对方程（4.24）求得通解 $y(t)$ 后代回变量 $t=\ln|x|$，便可得到欧拉方程（4.23）的通解.

因方程（4.24）有形如 $y=e^{\lambda t}$ 的解，即方程（4.23）有形如 $y=x^{\lambda}$ 的解，由此推知，可直接求欧拉方程（4.23）的形如 $y=x^K$ 的解，以 $y=x^K$ 代入（4.23）并约去因子 x^K 可得到确定 K 的代数方程

$$K(K-1)\cdots(K-n+1)+a_1K(K-1)\cdots(K-n+2)+\cdots+a_n=0 \qquad (4.25)$$

可以证明，这正是（4.23）的特征方程．因此，若（4.25）有 m 重实根 $K=K_0$，则对应方程（4.23）的 m 个解为

$$x^{K_0},x^{K_0}\ln|x|,x^{K_0}\ln^2|x|,\cdots,x^{K_0}\ln^{m-1}|x|$$

而若（4.25）有 m 重复根 $K=\alpha+i\beta$，则对应方程（4.23）的 $2m$ 个实值解为

$$x^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\cos(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln^2|x|\cos(\beta\ln|x|), \cdots, x^{\alpha}\ln^{m-1}|x|\cos(\beta\ln|x|),$$
$$x^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln|x|\sin(\beta\ln|x|), x^{\alpha}\ln^2|x|\sin(\beta\ln|x|), \cdots, x^{\alpha}\ln^{m-1}|x|\sin(\beta\ln|x|).$$

例 4.7 求解方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$.

解 寻找方程的形式解 $y=x^K$，代入得 $K(K-1)-3K+4=(K-2)^2=0$，解之得 $K=2$，且为二重单根．因此，方程有通解

$$y=(c_1+c_2\ln|x|)x^2$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 4.8 求解方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$.

解 设 $y=x^K$，得 $K(K-1)+2K+2=K^2+K+2=0$，有解 $K_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$．方程的通解为

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|x|\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln|x|\right)\right]$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

习题 4.2.1

1．求解下列常系数线性微分方程（所有的求导均是关于变量 t 的）:

(1) $x^{(4)}-5x''+4x=0$；

(2) $x'''-3ax''+3a^2x'-a^3x=0$；

(3) $x^{(5)}-9x'''=0$；

(4) $x''' + 3x'' + 5x' - 9x = te^t$;

(5) $x^{(4)} - 4x'' + 4x = t^2 + t + 1$;

(6) $x'' + x' - 2x = 3\cos 2t$;

(7) $x''' + 8x = 2e^{-t}$;

(8) $x'' + 2x' + 4x = e^{-t}\cos\sqrt{2}t$;

(9) $x'' + 2x' = 2\sin t - 3\cos 2t$;

(10) $x'' - 6x' + 9x = 1 + e^{2t} + e^{3t}$;

(11) $x^{(4)} - 4x''' + 8x'' - 8x' + 4 = te^{-t}\cos t$;

(12) $x'' + 3x' + 2x = -te^{-t} + 5\cos 2t$.

2. 求下列欧拉方程的通解:

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$;

(2) $x^3y''' - 3x^2y'' + 12y = xe^x$;

(3) $x^2y'' + 3xy' - 6y = x^2\ln x$;

(4) $x^2y'' - xy' + 2y = 8x\cos(\ln x)$;

3. 设 $\varphi(t)$ 是方程 $x'' + \omega x = f(t)$ 的解，其中 ω 为非负常数，函数 $f(t)$ 于 $0 \le t < +\infty$ 连续，试证:

(1) 当 $\omega \ne 0$ 时，能够选择常数 c_1, c_2，使得

$$\varphi(t) = c_1\cos\sqrt{\omega}t + c_2\sin\sqrt{\omega}t + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_0^t f(s)\sin\left[\sqrt{\omega}(t-s)\right]ds, (0 \le t < +\infty);$$

(2) 当 $\omega=0$ 时，方程的通解可表为

$$\varphi(t)=c_1+c_2t+\int_0^t(t-s)f(s)ds,\quad (0\le t<+\infty)$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

4. 设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是微分方程 $x''+3x'+2x=f(t)$ 的两个解，其中 $f(t)$ 在无穷区间 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，试证：$\lim\limits_{t\to+\infty}[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]=0$.

4.2.2 求特解的待定系数法

比较系数法主要解决常系数非齐次线性方程的求解问题. 考虑下列形式的方程：

$$L[x]\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t) \tag{4.26}$$

这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是常数， $f(t)$ 为连续函数. 注意方程（4.26）的通解为相应的齐次线性方程的通解加上方程（4.26）的一个特解. 前面已讨论了齐次线性方程通解的求法，现只需讨论方程（4.26）的特解.

可按非齐项 $f(t)$ 的类型用**比较系数法**求方程（4.26）的特解.

类型Ⅰ 设 $f(t)=(b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m)e^{\lambda t}$ ，其中 λ 和 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数，那么方程（4.26）有形如

$$\bar{x}=t^k(B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m)e^{\lambda t}$$

的特解，其中 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 λ 的重数（单根相当于 $k=1$; 当 λ 不是特征根即 $F(\lambda)\ne0$ 时，取 $k=0$ ），而 $B_i(i=0,1,\cdots,m)$ 为待定常数.

将特解 $\overline{x}$ 代入方程（4.26），并比较 t 的同幂次系数，可得一系列 B_i 的线性方程，解之得 B_i . 现分 $\lambda=0,\lambda\neq 0$ 两种情形来进行讨论.

(1) 当 $\lambda=0$ 时，此时

$$f(t)=b_0t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m.$$

又区分两种情形:

(i) 若 $\lambda=0$ 不是特征根情形，即 $F(0)\neq 0$ ，因此 $a_n\neq 0$. 取 $k=0$ ，其特解形式为

$$\overline{x}=B_0t^m+B_1t^{m-1}+\cdots+B_{m-1}t+B_m$$

代入方程（4.26），比较同幂次项系数，得关系式

$$\begin{cases} B_0a_n=b_0, \\ B_1a_n+mB_0a_{n-1}=b_1, \\ B_2a_n+(m-1)B_1a_{n-1}+m(m-1)B_0a_{n-2}=b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots \\ B_na_n+(m-1)B_{n-1}a_{n-1}+\cdots+m(m-1)\cdots 2\cdot B_0a_0=b_m, \end{cases}$$

由于 $a_n\neq 0$ ，由上式可逐一求出待定常数 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ ；

(ii) 若 $\lambda=0$ 是 k 重特征根情形，即

$$F(0)=F'(0)=\cdots=F^{(k-1)}(0)=0,F^{(k)}(0)\neq 0.$$

此时， $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0,a_{n-k}\neq 0$ ，则方程（4.26）变为

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-k}\frac{d^kx}{dt^k}=f(t) \qquad (4.27)$$

令 $\frac{d^kx}{dt^k}=z$ ，上式可化为

$$\frac{d^{n-k}z}{dt^{n-k}}+a_1\frac{d^{n-k-1}z}{dt^{n-k-1}}+\cdots+a_{n-k}z=f(t)$$

因$a_{n-k}\neq 0, \lambda=0$已不是其特征根，即上式有形如

$$\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m$$

的特解，即方程（4.27）有特解$\tilde{x}$满足

$$\frac{d^k\tilde{x}}{dt^k}=\tilde{z}=\tilde{B}_0t^m+\tilde{B}_1t^{m-1}+\cdots+\tilde{B}_{m-1}t+\tilde{B}_m.$$

这表明$\tilde{x}$是t的$m+k$次多项式，其中t的$\leq k-1$幂次的项带任意常数. 可取任意常数为零作为其特解，即可取特解为

$$\tilde{x}=t^k(\gamma_0t^m+\gamma_1t^{m-1}+\cdots+\gamma_{m-1}t+\gamma_m)$$

这里$\gamma_j(j=0,1,\cdots,m)$为任意常数.

(2) 如果$\lambda\neq 0$，则作变量变换$x=ye^{\lambda t}$，可将方程（4.26）化为

$$\frac{d^ny}{dt^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+A_{n-1}\frac{dy}{dt}+A_ny=b_0t^m+\cdots+b_m, \tag{4.28}$$

其中$A_1,\cdots,A_n$都是常数，而且特征方程$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$的根$\lambda$对应于方程（4.28）的特征方程的零根，重数相同. 因此，我们有：

当λ不是特征方程$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$的根时，方程(4.28)有特解$\bar{y}=B_0t^m+\cdots+B_m$，从而方程（4.26）有特解$\bar{x}=(B_0t^m+\cdots+B_m)e^{\lambda t}$；

当λ是特征方程$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$的$k$重根时，方程（4.28）具有特解形式$\bar{y}=t^k(B_0t^m+\cdots+B_m)$，从而方程（4.26）有特解$\bar{x}=t^k(B_0t^m+\cdots+B_m)e^{\lambda t}$.

例 4.9 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=1-2t$的通解.

解 先求对应的齐次线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$$

的通解．其特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

有根$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，齐次方程的通解为$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$，其中$c_1,c_2$为任意常数. 再求非齐次方程的一个特解，这里$f(t)=1-2t,\lambda=0$．因$\lambda=0$不是特征方程的根，特解形式为$\tilde{x}=A+Bt$，其中$A,B$为待定常数．将$\tilde{x}=A+Bt$代入原方程

$$3B+2A+2Bt=1-2t$$

并比较t的同幂次系数得

$$\begin{cases}2B=-2\\2A+3B=1\end{cases}$$

解得$B=-1,A=1$，即$\tilde{x}=1-t$，故原方程的通解为

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+1-t$$

其中c_1,c_2为任意常数.

例 4.10 求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=e^{-t}$的通解.

解 从上例知对应的齐次线性微分方程的通解为$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$．现求原方程的一个特解，这里$f(t)=e^{-t},\lambda=-1$．因$\lambda=-1$是特征方程$\lambda^2+3\lambda+2=0$的

根，特解形式应设为 $\tilde{x}=Ate^{-t}$，代入原方程得 $Ae^{-t}=e^{-t}$，即 $A=1$，故原方程的通解为

$$x=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+te^{-t}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 4.11 求方程 $\frac{d^3x}{dt^3}+6\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+8x=(t+1)e^{-2t}$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=(\lambda+2)^3=0$ 有三重根 $\lambda_{1,2,3}=-2$，齐次方程有通解 $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-2t}$，其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数. 再求非齐次线性方程的一个特解，这里 $f(t)=(t+1)e^{-2t},\lambda=-2$. 因 $\lambda=-2$ 是特征方程的三重根，因此方程有特解形式 $\tilde{x}=t^3(A+Bt)e^{-2t}$，其中 A,B 为待定常数. 将特解代入原方程

$$(6A+24Bt)\left[6A+12(A+2B)t\right]e^{-2t}=(t+1)e^{-2t}$$

并比较系数得 $A=\frac{1}{6},B=-\frac{1}{24}$，从而 $\tilde{x}=\frac{1}{24}t^3(4-t)e^{-2t}$，故原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-2t}+\frac{1}{24}t^3(4-t)e^{-2t}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

类型Ⅱ 设 $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$，其中 α、β 为常数，$A(t)$、$B(t)$ 是 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式是 t 的最高次数为 m 次的实系数多项式，则方程(3.68)有如下形式的特解

$$\bar{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t},$$

这里 k 为特征方程 $F(\lambda)=0$ 的根 $\alpha+i\beta$ 的重数，而 $P(t)$、$Q(t)$ 为次数不高于 m 的 t 的实系数多项式，可以通过比较系数的方法来确定.

事实上，在类型 I 的讨论中，当 λ 为复数时结论仍成立. 将 $f(t)$ 表为复数形式

$$f(t)=\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)}+\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)}$$

由叠加原理（见习题 3.3.1 (2)），方程

$$L[x]=f_1(t)\equiv\frac{A(t)+iB(t)}{2}e^{(\alpha-i\beta)}$$

与方程

$$L[x]=f_2(t)\equiv\frac{A(t)-iB(t)}{2}e^{(\alpha+i\beta)}$$

的解的和为方程(3.55)的解.

因 $\overline{f_1(t)}=f_2(t)$，若 x_1 为 $L[x]=f_1(t)$ 的解，则 $\bar{x}_1$ 为 $L[x]=f_2(t)$ 的解. 直接利用类型 I 的结果，知方程(3.62)有如

$$\bar{x}=t^kD(t)e^{(\alpha-i\beta)}+t^k\overline{D(t)}e^{(\alpha+i\beta)}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$$

的解，其中 $D(t)$ 为 t 的 m 次多项式，而 $P(t)=2\operatorname{Re}\{D(t)\},Q(t)=2\operatorname{Im}\{D(t)\}$. 显然，$P(t)$、$Q(t)$ 为 t 的次数不高于 m 的实系数多项式.

注 4.2 待定系数法的关键是**正确地写出特解形式!**

例 4.12 求方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=2\sin 2t$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$ 有重根 $\lambda_{1,2}=-1$，齐次方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 现求非齐次方程的一个特解，这里 $f(t)=\cos 2t,\lambda=\pm 2i$.

因 $\lambda=\pm 2i$ 不是特征方程的根，因此特解形式为 $\tilde{x}=A\cos 2t+B\sin 2t$ ，其中 A,B 为待定常数.将特解代入原方程简化为

$$(-3A+4B)\cos 2t-(4A+3B)\sin 2t=2\sin 2t$$

并比较同类项系数得 $A=-\dfrac{6}{25},B=-\dfrac{8}{25}$. 即 $\tilde{x}=-\dfrac{2}{25}(3\cos 2t+4\sin 2t)$,故原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-t}-\frac{2}{25}(3\cos 2t+4\sin 2t)$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

注 4.3 类型Ⅱ的特殊情形

$$f(t)=A(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,\qquad f(t)=B(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

可用更简便的**复数法**求解，现以例子来说明其过程.

首先给出一个定理，直接验证可得.

定理 4.6 对实系数函数微分方程(4.26)，设非齐函数 $f(t)=u(t)+iv(t)$ 为复值函数，$u(t)$、$v(t)$ 为实函数. 如复值函数 $x=U(t)+iV(t)$ 是微分方程(4.26)的复值解，则实函数 $U(t)$、$V(t)$ 分别是实值微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)=u(t)$$

和

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)=v(t)$$

的解.

例 4.13　用复数法解例 4.12.

解　由例 4.1 知齐次方程有通解

$$x=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

为求对应非齐次微分方程的特解，先求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=2e^{2it}$$

的特解．这属于类型 I，而 $2i$ 不是特征方程的根，故可设特解形式为 $\tilde{x}=Ae^{2it}$，将它代入原方程并消去因子 e^{2it} 得 $(-3-4i)A=2, A=-\frac{6}{25}+\frac{8}{25}i$，进一步得

$$\tilde{x}=-\frac{2}{25}(3-4i)e^{2it}=-\frac{2}{25}(3\cos 2t+4\sin 2t)-\frac{2i}{25}(4\cos 2t-3\sin 2t)$$

分出特解 $\tilde{x}$ 的实部 $\mathrm{Re}(\tilde{x})=-\frac{2}{25}(3\cos 2t+4\sin 2t)$．根据定理 4.6，这就是原方程的一个特解．因此，原方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-2t}-\frac{2}{25}(3\cos 2t+4\sin 2t)$$

与例 4.12 所得结果相同.

最后，我们指出：把常系数线性微分方程组转化成高阶方程来求解比前面介绍的方法要简单，至少来说工作量要小．例如，考虑例题 4.4. 若记 $\boldsymbol{x}=(x,y)^T$，则由原方程可得：

$$x''-6x'+34x=-4e^{-t}$$

$$y'=\frac{1}{5}\left(x'-3x-e^{-t}\right)$$

因此，只要求出了 $x(t)$，那么 $y(t)$ 就容易给出．关于 $x(t)$，相应的齐次方程的通解为：

$$x(t)=e^{3t}\left(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t\right)\text{，其中 } c_1,c_2 \text{ 为任意常数}$$

根据非齐次方程的特点，可设特解形式为：

$$x(t)=Ae^{-t}\text{，其中 } A \text{ 为特定常数}$$

代入得： $A=-\dfrac{4}{41}$．这样求得原方程的通解为：

$$x(t)=e^{3t}\left(c_1\cos 5t+c_2\sin 5t\right)-\frac{4}{41}e^{-t}$$
$$y(t)=e^{3t}\left(c_2\cos 5t-c_1\sin 5t\right)-\frac{5}{41}e^{-t}$$

由满足初始条件 $\boldsymbol{\varphi}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 可确定 c_1,c_2，且 $c_1=\dfrac{4}{41}$， $c_2=\dfrac{46}{41}$．特解为：

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\frac{1}{41}e^{3t}\begin{bmatrix}4\cos 5t+46\sin 5t-4e^{-4t}\\46\cos 5t-4\sin 5t-5e^{-4t}\end{bmatrix}$$

结果相同，但这里避免了求矩阵的逆.

此外，用例子来说明上述方法可用来求非齐次欧拉方程的特解、通解等．例如，考虑二阶微分 $t^2x''+2tx'-2x=t^{-1}$．对齐次方程，可设解具有形式：$x=t^{\lambda}$，其中 λ 为参数． 代入得特征方程：$\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0$，解之得：$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$． 因此，齐次方程的通解为： $x(t)=c_1t^{-2}+c_2t$． 下一步，找非齐次微分方程的特解． 设特解具有形式： $\varphi(t)=At^{-1}$，代入原方程可求得： $A=-1/2$．因此，原微分方程的通解为： $x(t)=c_1t^{-2}+c_2t-t/2$，其中 c_1 和 c_2 为任意常数.

习题 4.2.2

1. 求解下列常系数线性微分方程（所有的求导是关于t的）:

(1) $x''' - 3x'' + 5x' - 3x = 2 - t$；

(2) $x^{(4)} - 2x'' + x = t\cos t$；

(3) $x'' + x' - 2x = 3\sin 2t$；

(4) $x''' - x = t^2 e^t$；

(5) $x'' + 5x' + 6x = -2te^{2t}$；

(6) $x'' - 2x' + 2x = te^t \sin 2t$；

(7) $x'' + 4x = 2\sin 2t - \cos 2t$；

(8) $x'' + x = -2t\sin t$；

(9) $x'' + 2x' + 4x = 4e^{-t} + 13\sin\left(2\sqrt{3}t\right)$;

(10) $x'' + x = \dfrac{2t}{\sin^3 t}$.

2. 求下列方程的通解:

(1) $t^2 x'' - 4tx'' + 6x = -te^{2t}$；

(2) $t^2 x'' - 3tx' - 4x = 2t\ln t$；

(3) $t^2 x'' - 2tx' + 2x = -2t\cos(2\ln t)$.

3. 试把下列方程组的求解问题转化成高阶方程的求解问题，并求解:

(1) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t)$，其中，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$，其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\6&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\t\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$；

(4) $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$，其中，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{bmatrix}-1\\t\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

§4.3 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换法是求解初值问题的（齐次或非齐次）线性微分方程（组）的有效方法，它把微分方程的求解问题转化成代数方程的求解问题.

首先，介绍纯量函数的拉普拉斯变换．设定义在$t\geq 0$上的实或复值连续函数$f(t)$满足$|f(t)|<Me^{\sigma t}$（其中M和σ均为常数），则形如

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt\text{，其中，}\operatorname{Re}(s)>\sigma$$

的变换称为函数$f(t)$的**拉普拉斯变换**，其中，$f(t)$称为**原函数**，而$F(s)$成为**像函数**.

其次，由向量函数$\boldsymbol{f}(t)$的每个分量的拉普拉斯变换后的函数所组成的向量函数称为$\boldsymbol{f}(t)$的拉普拉斯变换，记为

$$\Im[\boldsymbol{f}(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\boldsymbol{f}(t)dt$$

显然，求向量函数称为$\boldsymbol{f}(t)$的拉普拉斯变换，则只需求其各个分类函数拉普拉斯变换.

第三，拉普拉斯变换具有性质：若函数 $f(t)$ 及导函数 $f'(t)$ 的拉普拉斯变换存在，则有关系：

$$\Im[\boldsymbol{f}'(t)]=\int_{t_0}^{+\infty}e^{-st}\boldsymbol{f}'(t)dt=s\Im[\boldsymbol{f}(t)]-\boldsymbol{f}(t_0)$$

第四，拉普拉斯变换可方便地用来求解下列两类常系数线性微分方程初值问题的解

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}\ \text{（方程组）}$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t),x^{(i)}(t_0)=x_0^{(i)},0\le i\le n-1\ \text{（高阶方程）}$$

利用拉普拉斯变换求微分方程解的方法**拉普拉斯变换方法**. 为方便，这里我们列出某些常见纯量函数的拉普拉斯变换，参考下表.

序号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$	$F(s)$ 的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$Re\ s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$Re\ s>0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re\ s>0$
4	e^{zt}	$\frac{1}{s-z}$	$Re\ s>Re\ z$
5	te^{zt}	$\frac{1}{(s-z)^2}$	$Re\ s>Re\ z$
6	t^ne^{zt}	$\frac{n!}{(s-z)^{n+1}}$	$Re\ s>Re\ z$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Re\ s>0$

8	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$Re\ s>0$
9	$sh\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$Re\ s>\lvert\omega\rvert$
10	$ch\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$Re\ s<\lvert\omega\rvert$
11	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$Re\ s>0$
12	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$	$Re\ s>0$
13	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$Re\ s>\lambda$
14	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$Re\ s>\lambda$
15	$te^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega(s-\lambda)}{\left((s-\lambda)^2+\omega^2\right)^2}$	$Re\ s>\lambda$
16	$te^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{\left((s-\lambda)^2+\omega^2\right)^2}$	$Re\ s>\lambda$

我们指出：（1）拉普拉斯变换法主要用于求解微分方程的初值问题；（2）在应用这种方法求微分方程初值问题的解时，首先求出解的拉普拉斯变换，然后根据此表,反过来给出解的分析表达;(3)假如要求满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解，则通过变换 $t\to t-t_0$ 可化为求满足初始 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{\eta}$ 的解.

对于上面高阶微分方程的初值问题，记 $X(s)=\Im[x(t)]$， $F(s)=\Im[f(t)]$，则可得

$$\left(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n\right)X(s)=$$
$$F(s)+\left(s^{n-1}+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\right)x_0^{(0)}+\left(s^{n-2}+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\right)x_0^{(1)}+\cdots+x_0^{(n-1)}$$

或改写为： $A(s)X(s)=F(s)+B(s)$．因此，得

$$X(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)}=\sum_{i=1}^{m}P_i(s)$$

其中， $P_1(s),\cdots,P_m(s)$ 是某些具有原像的简单像函数（即通过查阅上述拉普拉斯变换即给出原像函数）．这样，高阶常系数方程通过拉普拉斯变换法给出了满足初始条件的特解.

例 4.14 利用拉普拉斯变换求解例 4.4.

解 将方程写成分量形式:

$$\begin{cases}x_1'=3x_1+5x_2+e^{-t}\\ x_2'=-5x_1+3x_2\end{cases},\quad x_1(0)=0,x_2(0)=1$$

令 $X_1(s)=\Im[x_1(t)],\quad X_2(s)=\Im[x_2(t)]$，对微分方程组施行拉普拉斯变换可得

$$\begin{cases}sX_1(s)=3X_1(s)+5X_2(s)+\dfrac{1}{s+1}\\ sX_2(s)-1=-5X_1(s)+3X_2(s)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s-3)X_1(s)-5X_2(s)=\dfrac{1}{s+1}\\ 5X_1(s)+(s-3)X_2(s)=1\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}X_1(s)=\dfrac{(s-3)/(s+1)+5}{(s-3)^2+5^2}=\dfrac{1}{41}\left[4\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2}+46\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2}-4\dfrac{1}{s+1}\right]\\ X_2(s)=\dfrac{(s-3)-5/(s+1)}{(s-3)^2+5^2}=\dfrac{1}{41}\left[46\dfrac{s-3}{(s-3)^2+5^2}-4\dfrac{5}{(s-3)^2+5^2}-5\dfrac{1}{s+1}\right]\end{cases}$$

取反变换或查拉普拉斯变换表可得

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{41} e^{3t} (4\cos 5t + 46\sin 5t - 4e^{-4t}) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{41} e^{3t} (46\cos 5t - 4\sin 5t - 5e^{-4t}) \end{cases}$$

结果和例 4.4 一样.

对非齐次常系数线性微分方程组的初值问题，可用拉普拉斯变换化为代数方程组，求解代数方程组后再通过拉普拉斯反变换求得微分方程组满足初值条件的解.

注 4.4 并非任何函数都有拉普拉斯变换和反变换，因此并非任何常系数线性微分方程（组）都能应用拉普拉斯变换求解.

习题 4.3

1. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} x_1' + x_2' = 1, \\ x_1' - x_2' = 0. \end{cases}$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$；

(2) $\begin{cases} x_1'' + 3x_1' + 2x_1 + x_2' + x_2 = 0, \\ x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0. \end{cases}$ $x_1(0) = 1, x_1'(0) = -1, x_2(0) = 0$.

§4.4 其它若干解法简介

本节介绍线性微分方程的其它两种解法：降阶法、幂级数法，其中降阶法需要知道方程的若干个解，幂级数法能给出微分方程解的级数形式.

4.4.1 降阶法*

一般的高阶微分方程$F\left(t,x,x',\cdots,x^{(n)}\right)=0$没有普遍的解法，处理求解问题的基本原则是降阶．本小节介绍一些可降阶的方程类型的求解方法.

可降阶的方程类型

(1) 不显含$x,x',\cdots,x^{(k-1)}$的方程

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},\cdots,x^{(n)})=0,\quad (1\le k\le n) \tag{4.29}$$

则可降k阶.

事实上，令$y=x^{(k)}$，方程（4.29）降为y的$n-k$阶方程

$$F(t,y,y',\cdots,y^{(n-k)})=0 \tag{4.30}$$

如果求得方程（4.30）的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

即

$$x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k}).$$

再积分k次得

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数． 可以验证，这就是原方程（4.29）的通解.

特别地，若二阶微分方程不显含x，则令$x'=y$便把方程化为一阶微分方程.

例 4.15 求方程$\frac{d^5x}{dt^5}-\frac{1}{t}\frac{d^4x}{dt^4}=0$的解.

解 令$y=\frac{d^4x}{dt^4}$，方程化为

$$\frac{dy}{dt}-\frac{1}{t}y=0$$

这是一阶方程，有解$y=ct$，即$\frac{d^4x}{dt^4}=ct$. 于是

$$x=c_1t^5+c_2t^3+c_3t^2+c_4t+c_5$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_5$为任意常数，此即为原方程的通解.

(2) 不显含自变量t的方程

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)})=0 \tag{4.31}$$

则可降一阶.

事实上，令$y=x'$，并视y为新未知函数，x为新自变量，则有

$$x'=y,\quad x''=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}x'=y\frac{dy}{dx},\quad x'''=y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2\frac{d^2y}{dt^2},\quad \cdots$$

用数学归纳法，可证明：$x^{(k)}$可用$y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$表出$(k\le n)$. 将其代入方程（4.31）得$x,y$的$n-1$阶方程

$$G\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right)=0,$$

它比原方程（4.31）降低了一阶.

例 4.16 求解方程$xx''+(x')^2=0$.

解 令 $y=x'$，因有 $x''=y\dfrac{dy}{dx}$，原方程化为

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=0$$

得 $y=0$ 或 $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$，积分得 $y=\dfrac{c}{x}$，即 $x'=\dfrac{c}{x}$. 再积分之:

$$x^2=c_1t+c_2$$

此即为原方程的通解，其中 c_1,c_2 为任意常数.

例 4.17 求第一章中的数学摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

满足初值条件：当 $t=0$ 时 $\varphi=\varphi_0>0,\dfrac{d\varphi}{dt}=0$ 的特解.

解 令 $\dfrac{d\varphi}{dt}=p$，则 $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}=p\dfrac{dp}{d\varphi}$. 此时，方程化为

$$p\frac{dp}{d\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi$$

积分得

$$\frac{1}{2}p^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c)$$

或

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{g}{l}(\cos\varphi+c) \quad (4.32)$$

其中 c 为任意常数. 初值条件代入（4.32）得

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)$$

即

$$\frac{d\varphi}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0} \tag{4.33}$$

为确定其符号．先讨论摆从 $\varphi=\varphi_0$ 到 $\varphi=-\varphi_0$ 第一次摆动情况，这时 $\frac{d\varphi}{dt}<0$ ，即

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}$$

应用分离变量法积分并考虑初值条件得

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=-\int_0^t\sqrt{\frac{2g}{l}}dt=-t\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

令

$$t_0=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

则有

$$t_0-t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} \tag{4.34}$$

这里 t_0 代表摆从 $\varphi=\varphi_0$ 第一次到达 $\varphi=0$ 所需要的时间．当 $t=2t_0$ 时 $\varphi=-\varphi_0$ ．前面仅适合 $0\le t\le 2t_0$ 情况． 当 $t\ge 2t_0$ 时应有 $\frac{d\varphi}{dt}>0$ ，此时方程应取

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}$$

利用初值条件当 $t=2t_0$ 时 $\varphi=-\varphi_0$ ，积分上式得

$$\int_{-\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=-\int_{2t_0}^{t}\sqrt{\frac{2g}{l}}dt=(t-2t_0)\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

注意到

$$\int_0^{-\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=-\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$$

前式可改写为

$$t-3t_0=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} \tag{4.35}$$

上式适用于区间$2t_0\le t\le 4t_0$．如此类推，摆在$\varphi=\varphi_0$和$\varphi=-\varphi_0$之间作周期性摆动． 只要讨论$0\le t\le 4t_0$的情形即可．当摆由$\varphi=\varphi_0$和$\varphi=-\varphi_0$摆动时由方程（4.34）描述；摆由在$\varphi=-\varphi_0$到$\varphi=\varphi_0$摆动时由方程（4.35）描述． 两方程中的积分式$\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}$称为椭圆积分，不能用初等函数表示.

（3）已知齐次线性微分方程有k个线性无关的特解，则可降k阶.

设齐次线性方程为:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=0 \tag{4.36}$$

且已知它有k个线性无关解$x_1,x_2,\cdots,x_k$．先令$x=x_k y$逐步求x的n阶导数得

$$x'=x_k y'+x_k' y,\quad x''=x_k y''+2x_k' y'+x_k'' y,\quad \cdots\cdots$$

$$x^{(n)}=x_k y^{(n)}+nx_k' y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2!}x_k'' y^{(n-2)}+\cdots+x_k^{(n)}y$$

代入方程（4.36）化为y的n阶方程

$$x_k y^{(n)}+[nx_k'+a_1(t)x_k]y^{(n-1)}+\cdots+[x_k^{(n)}+a_1(t)x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x_k]y=0$$

因x_k满足齐次线性方程，可令$z=y'$，并用x_k除全式，便得z的$n-1$阶方程

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-2}(t)z'+b_{n-1}(t)z=0 \tag{4.37}$$

因有关系$z=y'=\left(\dfrac{x}{x_k}\right)'$ 或 $x=x_k\int zdt$，因此z方程的$k-1$个解

$$z_i=\left(\frac{x_i}{x_k}\right)' \quad i=1,2,\cdots,k-1$$

仍线性无关．事实上，$z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$是（4.376）的解，假设它们之间存在关系式

$$\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2+\cdots+\alpha_{k-1}z_{k-1}\equiv 0$$

即

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)'+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)'+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)'\equiv 0$$

其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k-1}$为常数．积分上式，有

$$\alpha_1\left(\frac{x_1}{x_k}\right)+\alpha_2\left(\frac{x_2}{x_k}\right)+\cdots+\alpha_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right)\equiv -\alpha_k$$

或

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+\alpha_k x_k\equiv 0$$

因$x_1,x_2,\cdots,x_k$线性无关，必有$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$．这证明了$z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$线性无关.

因此，仿上做法，可进一步令$z=z_{k-1}\int udt$而得u的$n-2$阶齐次线性方程

$$u^{(n-2)}+c_1(t)u^{(n-2)}+\cdots+c_{n-2}(t)u=0$$

且有$k-2$个线性无关解

$$u_i = \left(\frac{z_i}{x_k}\right)' \quad i = 1, 2, \cdots, k-2$$

从而使原方程降低了二阶.

如此类推. 因此，已知 k 个线性无关解 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 时可降 k 阶.

特别地，对于二阶齐次线性微分方程，若已知非零特解 x_1，则方程可解. 事实上，设特解 x_1 满足方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \tag{4.38}$$

经变换 $x = x_1 \int y dt$ 后方程变为一阶线性微分方程

$$x_1 \frac{dy}{dt} + [2x_1' + p(t)x_1]y = 0$$

可解得

$$y = c\frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt}$$

因此方程（4.38）的解为

$$x = x_1[c_1 + c_2 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt] \tag{4.39}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

如取 $c_1 = 0, c_2 = 1$，可得方程（4.39）的一个特解

$$x = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int p(t)dt} dt$$

因它与 x_1 之比不为常数，故它与 x_1 线性无关（见第三章习题 3.2 的第 7 题）.

于是解（4.39）是方程（4.38）的通解.

例 4.18 知 $x=\frac{\sin t}{t}$ 是方程 $x''+\frac{2}{t}x'+x=0$ 的解，求方程的通解.

解 这里 $p(t)=\frac{2}{t}$，由(4.37)得

$$x=\frac{\sin t}{t}\left(c_1+c\int\frac{t^2}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{t^2}dt\right)=\frac{\sin t}{t}\left(c_1-c\cos t\right)=\frac{1}{t}(c_1\sin t-c\cos t)$$

其中 c_1,c 为任意常数. 这是方程的通解.

习题 4.4.1

1. 求解下列方程(这里 $x'=\frac{dx}{dt},x''=\frac{d^2x}{dt^2}$)：

(1) $x''=\frac{1}{2x'}$；

(2) $xx''-(x')^2+(x')^3=0$；

(3) $x''+\frac{2}{1-x}(x')^2=0$；

(4) $x''+\sqrt{1-(x')^2}=0$；

(5) $ax''+[1+(x')^2]^{3/2}=0$，其中 a 为非零常数；

（6） $x''-\frac{1}{t}x'+(x')^2=0$ （提示：两边除以 x'）

2. 试证：对于二阶齐次线性微分方程

$$x''+p\left(t\right)x'+q\left(t\right)x=0$$

其中 $p(t),q(t)$ 为连续函数.

(1) 若 $p(t)\equiv-tq(t)$，则 $x=t$ 是方程的解；

(2) 若存在常数 λ，使得 $\lambda^2+\lambda p(t)+q(t)\equiv0$，则方程有解 $x\left(t\right)=e^{\lambda t}$；

(3) 若 $x_1(t),x_2(t)$ 是方程的两个线性无关解，则方程的系数 $p(t),q(t)$ 由 $x_1(t),x_2(t)$ 唯一确定，且 $x_1(t),x_2(t)$ 没有公共零点.

3. 求微分方程： $tx''+2(1+t)x'+2x=0\ (t\neq 0)$ 的通解.

4. 假设 $\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 是方程 (4.30) 的通解，而函数 $\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 是 $x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$ 的通解,试证：$\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 就是方程(4.29) 的通解, 这里 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-k},\cdots,c_n$ 为任意常数.

5. 已知 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\1/t\end{pmatrix}$ 是齐次微分方程组 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$ 的一个特解，其中 $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}1 & -t\\1/t^2 & -2/t\end{pmatrix}$，试求非齐次微分方程组 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的通解，其中 $\boldsymbol{f}(t)=\dfrac{-t+\ln|t|}{t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$.

4.4.2 幂级数法*

通过前几节的讨论，我们知道，能用初等函数的有限形式求解的微分方程只局限于某些特殊类型. 因此，想要扩大求解微分方程的范围，应该从解的“有限形式”转向“无限形式”，例如无穷级数. 下面讨论能否用幂级数来表示二阶线性微分方程的解.

二阶线性微分方程的幂级数解 考虑二阶齐线性微分方程的初值问题：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.39}$$

一般地，这种方程不能应用前面介绍的求解方法求解. 然而，我们有

定理 4.7 若方程（4.39）中系数 $p(x)$、$q(x)$ 能展成收敛区间为 $|x|<R$ 的幂级数，则二阶齐线性方程有收敛区间为 $|x|<R$ 的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n .$$

例 4.19 用幂级数求方程 $y''-xy=0,\quad y'\equiv\dfrac{dy}{dx}$ 的通解.

解 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

是方程的解，这里 $a_i\ (i=0,1,\cdots,n,\cdots)$ 是待定常数．于是

$$y''=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+\cdots$$

将 y,y'' 的表达式代入方程，比较 x 的同次幂的系数，可得

$$2\cdot 1a_2=0,\quad 3\cdot 2a_3-a_0=0,\quad 4\cdot 3a_4-a_1=0,\quad 5\cdot 4a_5-a_2=0$$

一般地可推得

$$a_{3k}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3k-1)\cdot 3k},\quad a_{3k+1}=\frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3k\cdot(3k+1)},\quad a_{3k+2}=0$$

其中 a_0,a_1 为任意常数． 因而

$$\begin{aligned}y=a_0&\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3n-1)\cdot 3n}+\cdots\right]\\&+a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3n\cdot(3n+1)}+\cdots\right]\end{aligned}$$

上式中两个幂级数的收敛半径为无限大，因此两个级数之和亦收敛，且收敛函数是方程的解.

幂级数方法也可用来求解初值问题。

例 4.20 用幂级数试求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足初值条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

解 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

是方程的形式解，这里 $a_i\ (i=0,1,\cdots,n,\cdots)$ 是待定常数. 首先，利用初值条件可得

$$a_0=0,\quad a_1=1$$

于是

$$\begin{aligned}
y&=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots\\
y'&=1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\\
y''&=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots
\end{aligned}$$

将 y, y', y'' 的表达式代入方程，比较 x 的同次幂的系数，得到

$$a_2=0,\quad a_3=1,\quad a_4=0,\quad \cdots,\quad a_n=\frac{2}{n-1}a_{n-2},\quad \cdots$$

因而

$$a_5=\frac{1}{2!},\quad a_6=0,\quad a_7=\frac{1}{6}=\frac{1}{3!},\quad a_8=0,\quad a_9=\frac{1}{4!},\quad \cdots$$

即对一切正整数 k 成立

$$a_{2k+1}=\frac{1}{k}\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{k!},\qquad a_{2k+2}=0$$

于是方程的解为

$$y = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \cdots = x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots\right) = xe^{x^2}.$$

例 4.21 和例 4.22 满足定理条件，系数 $0, -x$ 和 $-2x, -4$ 可看成在整个数轴上收敛的幂级数，故方程的幂级数解在整个数轴上是收敛的．但有些方程，例如高斯超几何方程

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{4.40}$$

其中 α, β, γ 是系统参数且均为正数，就不满足定理条件，这是因为两个系数函数 $p(x) = \frac{\gamma - (1+\alpha+\beta)x}{x(1-x)}$，$q(x) = -\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}$ 并不满足定理 4.7 的条件．然而，我们仍然可以用幂级数方法找到方程（4.40）的解，甚至于通解。

事实上，设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，把它代人方程（4.40）并比较 x 的同次幂的系数，得

$$(n+1)(n+\gamma)a_{n+1} = (n+\alpha)(n+\beta)a_n \tag{4.41}$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$．由（4.41）可求得

$$a_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+\alpha)(k+\beta)}{(n+1)!\prod_{k=1}^{n}(k+\gamma)} a_0 \tag{4.42}$$

其中，a_0 为任意常数。利用伽马函数的性质：$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$，并引进 Pochhammer 符号 $(c)_n$，它被定义为：$(c)_n = \Gamma(n+c)/\Gamma(c)$，则表达式（4.42）可改写为

$$a_n = \frac{a_0}{n!}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \tag{4.43}$$

再引进高斯超几何函数

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) \equiv \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \qquad (4.44)$$

它在$|x|<1$范围内是收敛的，那么我们找到了方程（4.40）的一个分析解

$$y = c_1 F(\alpha,\beta;\gamma;x) \qquad (4.45)$$

其中c_1为任意常数。类似地（即在$x=1$点展开），假如$1+\alpha+\beta>\gamma$，则可求得方程（4.40）的另一个解

$$y = c_2 F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-x) \qquad (4.46)$$

它在$|x-1|<1$范围内是收敛的，其中c_2为任意常数。这样，方程（4.40）的通解为

$$y = c_1 F(\alpha,\beta;\gamma;x) + c_2 F(\alpha,\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-x) \qquad (4.47)$$

它在$0<x<1$范围内是收敛的，其中c_1和c_2为任意常数。

更一般地，我们有下列结果。

定理 4.8 若方程（4.39）中系数$p(x)$、$q(x)$有性质：$x\,p(x)$、$x^2 q(x)$能展成收敛区间为$|x|<R$的幂级数,则二阶齐线性方程有收敛区间为$|x|<R$的幂级数形式特解

$$y = x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n}$$

这里α为待定常数.

幂级数解法的思想和待定系数法有类似之处，不同的是前者待定的是级数的系数，因而通常计算量较大．其实，幂级数解法适用二阶以上的高

阶线性微分方程，并能求其特解或通解. 特别是，通过幂级数方法求解某些特殊方程得到某些特殊形式的函数解，例如，能用幂级数方法求解的二阶线性微分方程有

贝塞耳方程　　$x^2y''+2xy'+(x^2-n^2)y=0$；

勒让德方程　　$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$；

埃尔米特方程　　$y''-2xy'+2\nu y=0$.

这些方程的求解在复数域中更为方便和自然，从而引发了复解析理论的产生和发展. 所求方程的幂级数解不能表示为有限形式的初等函数，形成一类特殊函数.

习题 4.4.2

1. 用幂级数解法求解下列方程：

(1) $x''+tx'+x=0, x(0)=0, x'(0)=1$；

(2) $(1-t)x''+x=0$；

(3) $x''-tx'-x=0$.

2. 求解勒让德方程： $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$，其中$n$是正整数.

3. 求n阶**贝赛尔**方程（n是非负常数） $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$的通解，并求特定贝塞尔方程$t^2x''+tx'+\left(t^2-\dfrac{1}{4}\right)x=0$的解（提示： $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ）.

第五章 微分方程的基本定理

前几章研究了可求解性、解的结构与性质等问题，但没有从理论上解决解的存在性、唯一性等问题. 解的存在性是微分方程理论中的一个基本问题，也是进一步了解和研究解的性质的基础和前提. 对于某些微分方程，其解可以存在亦可以不存在，例如，第一章中提到的方程$1+x^2+(y')^2=0$就在实数范围内不存在任何解. 除存在性外，解的唯一性也是重要的. 有些微分方程满足初值条件的解尽管存在，但可以不唯一，例如，方程$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$过点$(0,0)$的解就不唯一. 事实上，易知$y=0$是满足条件的一个解，此外不能验证函数$y=\frac{1}{4}x^2$也是满足条件的解.

一个自然的问题是：对于一个初值问题的常微分方程，究竟在什么情况下，其解是存在且唯一的. 本章将对这个问题给出圆满而明确的回答，即解的存在唯一性定理，它是常微分方程理论中最基本的定理，具有重大的理论意义和重要的实用价值. 一方面，定理的证明过程不仅明确了解的存在范围，而且实际给出了一种找常微分方程近似解的方法，即逐步逼近法，这就更增添了存在唯一性定理的实用意义；另一方面，由于能找到微分方程分析解的例子并不多，大多数情况是只能通过计算机找到其数值解，而解的存在唯一性定理保证了解的存在性和唯一性，因此它是近似求解法（即数值法）的前提和基础.

与解的存在唯一性内容相关的是解对初始值的依赖性（包括连续性和

可微性）．事实上，由于种种条件的限制，实际测出的初始数据往往是不精确的,因此它只能近似地反映初始状态. 我们能否以它为初值条件所得到的解作为真实的解呢？这就产生了解对初值的连续依赖性问题，即当初值微小变动时，方程解的变化是否也很小？研究这一问题是有意义的，因为如果不然的话,所求的解就失去了实际意义. 此外,假如一个微分方程存在解，那么其存在的范围如何？更进一步，如何把小范围内存在的解延拓到更大范围的解？解的最大存在范围又如何？这些问题将在解的延拓定理中给出明确的回答.

本章将介绍和证明常微分方程（包括一阶常微分方程和常微分方程组）解的存在唯一性定理，并叙述解的某些性质，如解的延拓、解对初值的连续性和可微性等，最后介绍两种简单但常见的数值求解微分方程的方法.

§5.1　一阶微分方程的基本定理

5.1.1 解的存在唯一性定理

考虑下列一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $f(x,y)$ 是定义在矩形闭区域

$$R = \left\{ (x,y) \middle| \ |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b \right\} \tag{5.2}$$

上的连续函数. 根据一阶微分的不变形，原微分方程可改写为 $dy = f(x,y)dx$ ，

两边积分将把方程（5.1）转化成

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y)\, ds \tag{5.3}$$

这是一个代数方程（实际为积分方程），其中 y 是未知函数。现在，我们可获得一个基本事实，即若 $y=\varphi(x)$ 是方程（5.1）的一个定义于 $[a,b]$ 上的连续解，那么它也是方程（5.3）的一个解；反过来，若 $y=\varphi(x)$ 是方程（5.3）的一个连续解，那么它也是方程（5.1）的一个解．事实上，前半部分的结论是显然的，我们只需证明后半部分的结论．利用定积分的性质，在（5.3）的两边关于 x 求导得 $\varphi'(x)= f(x,\varphi(x))$，而且 $\varphi(x_0)= y_0$，因此 $y=\varphi(x)$ 是方程（5.1）的解.

上面的事实表明：要知道方程（5.1）的解的存在性，只需知道方程（5.3）的解的存在性．然而，对于方程（5.3），借用代数方程的迭代求根法，可证明它的解的存在性.事实上，对于 y_0，令

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds$$

显然，$\varphi_1(x)$ 是定义于 $[a,b]$ 上的连续函数。如果 $\varphi_1(x)\equiv\varphi_0(x)$，那么 $y=\varphi_0(x)$ 就是积分方程的解．否则，又把 $\varphi_1(x)$ 代人到积分方程右端的 y，得到一个新的函数 $\varphi_2(x)$，且

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_1(s))\, ds$$

假如 $\varphi_2(x)$ 还不是积分方程的解，继续下去．一般地，作函数迭代

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds \tag{5.4}$$

得到一个连续函数列

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots,$$

这里，若存在某个正整数n，使得$\varphi_{n+1}(x)\equiv\varphi_n(x)$，那么$\varphi_n(x)$就是积分方程的解. 根据数学分析，假如这个函数列在$[a,b]$上是一致收敛的，并记其极限函数为$\varphi(x)$，那么可以在（6.4）的两边取极限，获得

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(s,\varphi(s)\right)ds \tag{5.5}$$

这表明$y=\varphi(x)$是方程（5.3）的解，而且在$[a,b]$上是连续的，进一步，它也是方程（5.1）的连续解。这种逐步逼近地求出微分方程解的方法称为**皮卡（Picard）逐步逼近法**.

现在的问题是如何保证上述函数列在$[a,b]$上是一致收敛的. 为此，需要对函数$f(x,y)$在矩形闭区域R上附加某种条件，即下面要引进的**李普希茨**（Lipschitz）**条件**. 如果存在与y无关的常数L，使得不等式

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$$

对所有的(x,y_1)和$(x,y_2)\in R$都成立，这里L称为**李普希茨常数**，那么函数$f(x,y)$称为在R上关于y满足**李普希茨**（Lipschitz）**条件**. 我们指出：这一条件并不苛刻，事实上，由数学分析知识可知：假如函数$f(x,y)$关于y的导函数$f_y(x,y)$在R上连续，则$f(x,y)$在R上关于y满足李普希茨条件（看定理后面的附注），因此，满足此条件的函数还是很多的.

现在，我们来叙述并证明方程（5.1）的解的存在唯一性定理.

定理 5.1（存在唯一性定理） 如果函数 $f(x,y)$ 在 R 上连续且关于 y 满足李普希茨条件，则方程（5.1）存在唯一解 $y=\varphi(x)$，它是定义在区间 $|x-x_0|\le h$ 上的连续函数，这里 $h=\min(a,\ b/M)$， $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

证 首先，由前面的讨论，不难知道：若 $y=\varphi(x)$ 是方程（5.1）定义于区间 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 上的连续解，则 $y=\varphi(x)$ 也是积分方程（5.3）定义于区间 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 上的连续解，反之亦然.

其次，对于所有的正整数 n，可以断言序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 中的函数 $\varphi_n(x)$ 在区间 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 有定义、连续且满足不等式 $|\varphi_n(x)-y_0|\le b$，这能够由数学归纳法来证明之. 事实上，当 $n=1$ 时，我们有 $\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_0)ds$. 根据定理对 $f(x,y)$ 的连续性假设以及常数 M 和 h 的取法，显然 $\varphi_1(x)$ 在区间 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续且满足

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)-y_0|&=\left|\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_0(s))ds\right|\\&\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(s,\varphi_0(s))|ds\right|\\&\le M|x-x_0|\le Mh\le b\end{aligned}$$

（注意 x 可大于或小于 x_0），即结论对 $n=1$ 成立. 现在，设命题对正整数 k 成立，即 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续且满足不等式 $|\varphi_k(x)-y_0|\le b$，并考虑 $n=k+1$ 的情形. 此时，注意到 $\varphi_{k+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi_k(s))ds$. 根据归纳假设，$\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0-h\le x\le x_0+h$ 上有定义、连续且

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{k+1}(x)-y_0\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,\varphi_k(s)\right)\right|ds\right| \\ &\le M\left|x-x_0\right| \le Mh \le b\end{aligned}$$

即结论对$n=k+1$也成立．由数学归纳法知，结论对所有的正整数n都成立．

第三，显示出函数序列$\{\varphi_n(x)\}$在区间$x_0-h\le x\le x_0+h$上是一致收敛的．事实上，注意到函数项级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right],\quad \left|x-x_0\right|\le h \tag{5.6}$$

（这里$\varphi_0(x)\equiv y_0$）的部分和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right]=\varphi_n(x)$$

因此，函数序列的一致收敛性与函数项级数的一致收敛性等价．下面，证明函数项级数的一致收敛性，其中需要用到李普希茨条件．用归纳法建立此级数中通项的估计．注意到

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,\varphi_0(s)\right)\right|ds\right|\le M\left|\int_{x_0}^{x}ds\right|=M\left|x-x_0\right|$$

以及由李普希茨条件可知

$$\begin{aligned}\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,\varphi_1(s)\right)-f\left(s,\varphi_0(s)\right)\right|ds\right| \\ &\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)\right|ds\right| \\ &\le ML\left|\int_{x_0}^{x}\left|s-x_0\right|ds\right| \le \frac{ML}{2!}\left|x-x_0\right|^2\end{aligned}$$

下一步，对于正整数n，设不等式

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right|\le\frac{ML^{n-1}}{n!}\left|x-x_0\right|^n$$

成立，则由李普希茨条件可得

$$\left|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,\varphi_n(s)\right)-f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)\right|ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)\right|ds\right|$$
$$\le \frac{ML^n}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}\left|s-x_0\right|^n ds\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

于是，由数学归纳法知：对所有的正整数 k 和满足 $|x-x_0|\le h$ 的所有 x，并获得下列估计式

$$\left|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)\right| \le \frac{ML^{k-1}}{k!}\left|x-x_0\right|^k \le \frac{M}{L}\frac{(hL)^k}{k!}$$

其右端是正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{L}\frac{(hL)^k}{k!}$$

的一般项（通项）．由魏尔斯特拉斯（Weierstrass）判别法，可知函数项级数（2.6）在 $|x-x_0|\le h$ 上是一致收敛的。若设

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

则函数 $\varphi(x)$ 在 $|x-x_0|\le h$ 上连续，且满足不等式 $|\varphi(x)-y_0|\le b$.

第四，可断言函数 $\varphi(x)$ 是积分方程（5.3）的连续解．事实上，对任意的正整数 n，由李普希茨条件知

$$\left|f\left(x,\varphi_n(x)\right)-f\left(x,\varphi_{n-1}(x)\right)\right| \le L\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right|$$

以及函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $|x-x_0|\le h$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$，即知函数序列 $\{f(x,\varphi_n(x))\}$ 在 $|x-x_0|\le h$ 上一致收敛到 $f(x,\varphi(x))$．这样，我们能够在等式

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds$$

的两边取极限

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds$$
$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(s)\right)ds$$

于是，得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds$$

表明函数$\varphi(x)$的确是积分方程（5.3）的连续解.

最后，若$\psi(x)$是积分方程（5.3）的另一个连续解，则在$|x-x_0| \le h$上恒有$\varphi(x) \equiv \psi(x)$．这只要显示出$\psi(x)$也是函数序列$\{\varphi_n(x)\}$的一致收敛的极限函数便可．为此，从

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds \quad (n \ge 1)$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds$$

可得如下估计

$$|\varphi_0(x) - \psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, \psi(s))| ds\right| \le M|x - x_0|$$

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi_0(s)) - f(s, \psi(s))| ds\right|$$
$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(s) - \psi(s)| ds\right|$$
$$\le ML\left|\int_{x_0}^{x} |s - x_0| ds\right| \le \frac{ML}{2!}|x - x_0|^2$$

现设$|\varphi_{n-1}(x) - \psi(x)| \le \dfrac{ML^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$，则有

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| &\le \left|\int_{x_0}^{x}\left|f\left(s,\varphi_{n-1}(s)\right)-f\left(s,\psi(s)\right)\right|ds\right| \\
&\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_{n-1}(s)-\psi(s)\right|ds\right| \\
&\le \frac{ML^n}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}\left|s-x_0\right|^n ds\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}
\end{aligned}
$$

由数学归纳法知，对所有的正整数n和满足$|x-x_0|\le h$的所有x，并有下列估计式

$$
\left|\varphi_n(x)-\psi(x)\right| \le \frac{ML^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \le \frac{M(hL)^{n+1}}{L(n+1)!}
$$

而其最右端是收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(hL)^{n+1}}{L(n+1)!}$的通项，因此趋于零. 故$\{\varphi_n(x)\}$的一致收敛到$\psi(x)$. 根据极限的唯一性，可知：在$|x-x_0|\le h$上，$\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

至此，我们已经证明了方程（5.1）的解的存在唯一性定理.■

以下，给出本定理的某些重要附注.

注 5.1 存在唯一性定理的几何意义：定理 5.1 表明满足解的存在唯一性定理条件的微分方程的**任意两条轨线都不会相交**，这一性质在微分方程定性理论部分（看第六章）经常用到.此外，我们指出：尽管微分方程（5.1）存在无穷多条积分曲线，其形状可能非常复杂，但由定理 5.1 可知满足定理条件的任意两条积分曲线都不可能相交.

注 5.2 定理 5.1 中数h的几何意义，参考图 5.1.

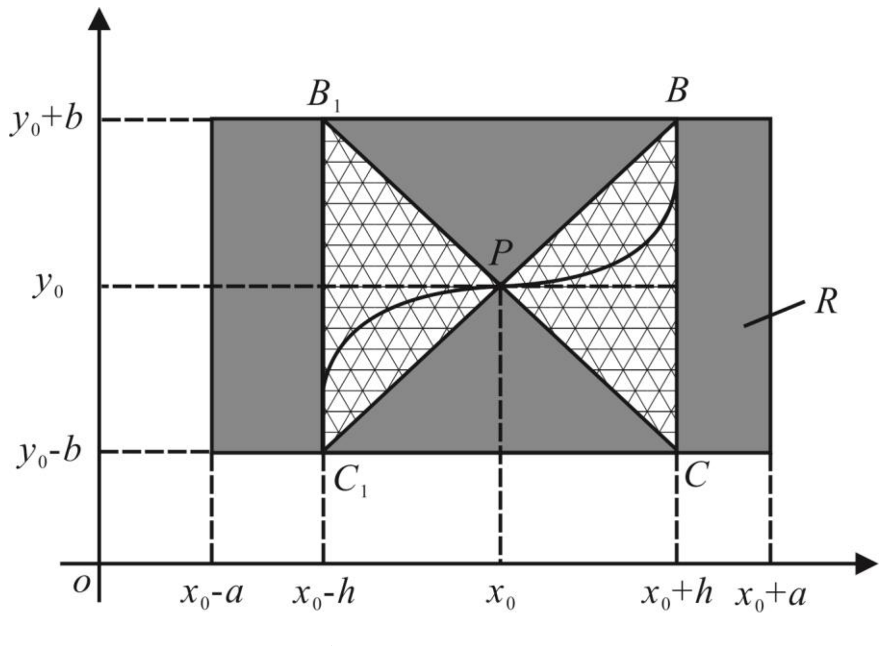


图 5.1 示意图.

图中 $h=b/M$，定理 5.1 的证明过程显示出方程（5.1）过点 (x_0, y_0) 的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0|\le h$ 上存在. 因为积分曲线的切线斜率介于两条直线 BC_1 和 B_1C 的斜率 M 和 $-M$ 之间, 所以当 $|x-x_0|\le h$ 时, 积分曲线上的点 $(x,\varphi(x))$ 的纵坐标满足不等式

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|\varphi(x)-y_0|\le M|x-x_0|\le b$$

也就是说，积分曲线弧夹在区域 B_1PC_1 及区域 BPC 的内部，当然也不会超出矩形 R. 定理 5.1 的证明过程中所有函数 $y=\varphi_n(x)$ 都可在 $|x-x_0|\le h$ 上确定, 它的图形都夹在区域 B_1PC_1 和区域 BPC 的内部，自然它的极限图形及积分曲线 $y=\varphi(x)$ 也不会超出区域 B_1PC_1 或 BPC 的范围.

注 5.3 对于一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x) \tag{5.7}$$

容易知道，当$P(x)$，$Q(x)$在$[\alpha,\beta]$连续时，定理的条件显然满足，因此，此线性方程存在唯一解．不仅如此，这时由任意初值(x_0,y_0)，$x_0\in[\alpha,\beta]$所确定的解在整个区间上$[\alpha,\beta]$上都有定义（留着习题）．

注 5.4 一般地，李普希茨条件比较难检验．然而，当函数$f(x,y)$在R上关于y具有连续偏导数时，这种检验将变得简单．事实上，若在R上f'_y存在且连续，则f'_y在R上有界，设$|f'_y|\le L$．这时，由微积分中值定理知：对任意的$(x,y_1),(x,y_2)\in R$，存在$0<\theta<1$，使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right||y_1-y_2|\le L|y_1-y_2|$$

成立．然而，反过来满足李普希茨条件的函数$f(x,y)$不一定有偏导数存在，例如，$f(x,y)=|y|$在任何区域内都满足李普希茨条件，但它在$y=0$处没有偏导数.

注 5.5 对于一阶隐式方程

$$F(x,y,y')=0 \tag{5.8}$$

我们也能给出解的存在唯一性定理．事实上，根据隐函数存在定理，若在(x_0,y_0,y_0')的某一邻域内，函数F连续，$F(x_0,y_0,y_0')=0$，$F_{y'}(x_0,y_0,y_0')\neq 0$，则必可把$y'$唯一地表示为$x,y$的函数

$$y'=f(x,y)$$

并且$f(x,y)$在$(x_0,y_0,)$的某一邻域内连续，满足

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

进一步，如果F关于所有变元存在连续的偏导数，则$f(x,y)$对x,y也存在连续的偏导数，且

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial y'}$$

显然它在有限区域内是有界的．由定理 5.1 知，方程（5.8）满足初值条件$y(x_0) = y_0$的解存在且唯一．这样，便得到下列推论.

推论 5.1 若在点(x_0, y_0, y_0')的某一邻域内，下列条件：

1. $F(x,y,y')$关于所有变元(x,y,y')连续，且存在连续偏导数；
2. $F(x_0, y_0, y_0') = 0$；
3. $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$，

成立，则方程（5.8）存在唯一连续解

$$y = y(x),\ |x - x_0| \le h \quad（h\text{为足够小的正数}）$$

且满足初值条件：

$$y(x_0) = y_0,\quad y'(x_0) = y_0'.$$

注 5.6 近似计算与误差估计．存在唯一性定理不仅肯定了解的存在性和唯一性，而且在证明过程中所采用的逐步逼近法实际给出了求方程近似解的一种方法．事实上，根据定理 5.1 的证明过程，可知在区间$|x - x_0| \le h$上成立

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right| \le \frac{M(hL)^{n+1}}{L(n+1)!} \tag{5.9}$$

这样，在进行近似计算时，可根据误差的要求，可适当选取逼近函数$\varphi_n(x)$.

为帮助理解，这里给出一个例子.

例 5.1 方程$\frac{dy}{dx}=x^2+2y^2$定义在矩形区域$R=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$上，试用存在唯一性定理确定经过点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的解的存在区间，并求在此区间上与真解的误差小于 0.03 的近似解的表达式.

解 注意到：$x_0=y_0=\frac{1}{2}$，$a=b=\frac{1}{2}$，$M=\max_{(x,y)\in R}\left|f(x,y)\right|=3$， $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)=\frac{1}{6}$，因此，解的存在区间为$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. 此外，在$R$上，$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|4y|\le 4=L$. 由估计式（5.9）及要求，我们有

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right| \le \frac{M(hL)^{n+1}}{L(n+1)!}=\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{1}{(n+1)!}<0.03$$

因此，可取$n=2$. 此时，可计算出方程的前 3 个近似解如下

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{2}$$

$$\varphi_1(x)=\int_0^x\left[s^2+\varphi_0^2(s)\right]ds=\frac{x}{4}+\frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x\left[s^2+\varphi_1^2(s)\right]ds=\frac{17x^3}{48}+\frac{x^5}{30}+\frac{x^7}{63}$$

其中$\varphi_2(x)$即为所求的近似解，且这种解与真解的误差不会超过 0.03.

5.1.2 解的延拓定理

定理 5.1 表明：解的存在和唯一是局部的，即定理只肯定解至少在区间 $|x-x_0|\le h$ 上存在，这里 $h=\min(a,b/M)$．可能出现这样的情况：随着 $f(x,y)$ 的定义域的增大，由解的存在唯一性定理所确定的解的存在范围反而缩小，例如，在例 5.1 中，对于区域 $R=\{(x,y)|\ |x-(1/2)|\le 1/2, |y-(1/2)|\le 1/2\}$，可计算得：$h=1/6$，而对更大区域 $R=\{(x,y)|\ |x-(1/2)|\le 1, |y-(1/2)|\le 1\}$，此时，可计算得 $M=27/4$，$h=4/27$，这表明解的存在区域反而减少了，这使我们感到很不满意．由此提出了一个问题，即解的存在范围能扩大吗？答案是肯定的，即下面的解的延拓定理.

在介绍此定理之前，先介绍解的延拓的概念．假设方程（5.1）的右端函数 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内连续，且关于 y 满足**局部李普希茨条件**，即对于区域 G 内的每一点，存在以其为中心且完全含于 G 内的矩形区域 R，在 R 上满足李普希茨条件．注意到：对于 G 内不同的点，相应的矩形区域 R 和李普希茨常数 L 可能不同．现在，设方程（5.1）的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间 $|x-x_0|\le h$ 上．取 $x_1=x_0+h$，$y_1=\varphi(x_1)$，并以 (x_1,y_1) 为中心，作一小的矩形，使得连同它的边界整个地含在区域 G 内（这是能够办到的，因为区域 G 内的每一点都是内点）．应用定理 5.1 的结果，可知存在 $h_1>0$，使得方程（5.1）在区间 $|x-x_1|\le h_1$ 上存在过点 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$，且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$．显然，解 $y=\psi(x)$ 的和解 $y=\varphi(x)$ 都定义在区间 $x_1-h_1\le x\le x_1$ 上，且在此区间上恒

有$\psi(x)\equiv\varphi(x)$，但解$y=\psi(x)$在$x_1\le x\le x_1+h_1$上仍然有定义，它可看成是原来定义在区间$|x-x_0|\le h$上的解$y=\varphi(x)$向右方向的延拓．这样，在区间$[x_0-h,x_0+h+h_1]$上就确定了一个解

$$y=\begin{cases}\varphi(x) & x_0-h\le x\le x_0+h\\ \psi(x) & x_0+h\le x\le x_0+h+h_1\end{cases}$$

即将原来的解延拓到较大的区间$x_0+h\le x\le x_0+h+h_1$上．再令$x_2=x_1+h$，$y_2=\varphi(x_2)$，如果$(x_2,y_2)\in G$，那么以(x_2,y_2)为中心，作一小的矩形，使得连同它的边界整个地包含在区域G内．仿前，又可将解延拓到更大的范围：$x_0-h\le x\le x_0+h+h_1+h_2$，其中$h_2$是某个正数．对于$x$值减少的一边（即左边）可进行同样的讨论，使解向左边延拓．上述解的延拓方法还可继续进行，直到最后得到一个解$y=\bar{\varphi}(x)$，它不能再向左右两边延拓了，这种解即为方程（5.1）的**饱和解**．注意到：**饱和解在它存在的区间内是连续的**．

性质 5.1（饱和解）任一饱和解$y=\bar{\varphi}(x)$的最大存在区间必定是一个开区间$\alpha<x<\beta$．

事实上，假如这个区间的右端是闭的（类似地可讨论左端是闭的情形），那么β便是有限数，且点$(\beta,\bar{\varphi}(\beta))\in G$．由于$G$是区域，因此这种点是$G$的内点．这样一来，解$y=\bar{\varphi}(x)$就还能继续向右方向延拓，从而它是非饱和解．矛盾！

自然要问：解$y=\varphi(x)$向两边延拓的最终情况究竟如何？这一问题由下面的延拓定理来回答．现在，我们不加证明地叙述下列定理．

定理 5.2（解的延拓定理）若方程（5.1）的右端函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，且关于 y 满足局部李普希茨条件，则

有界区域情形：方程（5.1）过 G 内任意一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，直到点 $(x,\varphi(x))$ 任意地接近区域 G 的边界. 以向 x 增大的方向延拓来说，如果 $y=\varphi(x)$ 只能延拓到区间 $c\le x<d$ 上，则当 $x\to d$ 时，$(x,\varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

无界区域情形：方程（5.1）过 G 内任意一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的方向延拓来说，则只有两种情形之一发生:

（1）解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$；

（2）若解 $y=\varphi(x)$ 只可以延拓到区间 $[x_0,d)$，其中 d 为有限数，则当 $x\to d$ 时，或者 $y=\varphi(x)$ 无界，或者点 $(x,\varphi(x))$ 趋于区域 G 的边界.

例 5.2 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2-4$ 分别通过点 $(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,-2\right)$ 的解的存在区间.

解 此方程右端函数在整个 Oxy 平面上满足解的延拓定理条件，而且易求得其通解为 $y=\dfrac{2+ce^{4x}}{2-ce^{4x}}$，故通过点 $(0,0)$ 的解为 $y=\dfrac{1-e^{4x}}{1+e^{4x}}$，其存在区间为 $-\infty<x<+\infty$；而通过点 $\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,-2\right)$ 的解为 $y=\dfrac{4+3e^{4x}}{4-3e^{4x}}$，其存在区间为 $\ln\dfrac{4}{3}<x<+\infty$，蕴含着过点 $\left(\dfrac{1}{2}\ln 2,-2\right)$ 的解为 $y=\dfrac{4+3e^{4x}}{4-3e^{x}}$ 向右方可以延拓到 $+\infty$，

但对x的减少方向，向左方只能延拓到$\ln\frac{4}{3}$，这是因为当$x\to\ln\frac{4}{3}$时，$y\to-\infty$. 这相当于上面推论中的第一种情形.

例 5.3 讨论方程$\frac{dy}{dx}=x(1+2\ln x)$满足条件$y(1)=0$的解的存在区间.

解 此方程右端函数在整个右半平面$x>0$上满足解的延拓定理条件，此时区域G（右半平面）是无界区域，y轴是它的边界. 易求得满足条件的特解为$y=x^2\ln x$，它在区间$0<x<+\infty$上有定义、连续且当$x\to0$时$y\to0$，即所求问题的解向右方可以延拓到$+\infty$，但向左方只能延拓到 0，且当$x\to0$时积分曲线上的点(x,y)趋于区域G的边界，这对应于上面推论中的第二种情形.

在本小节的最后我们指出，应用上面的推论不难证明：如果函数$f(x,y)$在整个Oxy上有定义、连续且有界，同时存在关于y的一阶连续偏导数，那么方程（5.1）的任一解均可延拓到区间$-\infty<x<+\infty$上.

5.1.3 解对初值的依赖性

在解的存在唯一性定理中，我们把初值(x_0,y_0)看作是固定的. 显然，假如(x_0,y_0)是变动的，则相应初值问题的解也将随之变动，即初值问题的解不单依赖于自变量x，而且依赖于初值(x_0,y_0). 因此，当考虑初值变动时，方程的解可看成为三个变量的函数，记为$y=\varphi(x,x_0,y_0)$，其中$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$.

下面，介绍解对初值依赖的两个性质：连续性和可微性. 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{5.10}$$

其中函数$f(x,y)$定义在区域G（对于开区域，其中的每一个点，均存在包含

在此区域内的一个领域）上。

首先，考察解对初值的连续依赖．我们有下面的定理:

定理 5.3（解对初值的连续依赖性） 假设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 满足局部李普希茨条件，则方程（5.10）的解对初值是连续依赖的，即对于 $(x_0,y_0)\in G$，设 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程（5.10）满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，它在区域 G 内的某个有限区间 $a\le x\le b$ 上有定义（要求 $a\le x_0\le b$），那么对任意给定的 $\varepsilon>0$，必能找到正数 $\delta=\delta(\varepsilon,a,b)$，使得当

$$\sqrt{(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2}\le\delta$$

时，方程（5.1）满足初值条件 $y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0$ 的解 $\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 在区间 $a\le x\le b$ 上也有定义，且满足

$$\left|\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\varepsilon,\ \mathrm{a}<x<b\,.$$

这里, 我们指出: (1) 满足不同初值条件的解可用同一个函数来描述 (通解结构)；其次，定理证明的关键是对任意给定的 $\varepsilon>0$，如何找到满足要求的 δ.

为了证明定理 5.3，先证下列 2 个命题，其中命题 5. 6 是证明定理 5.3 的关键.

命题 5. 6 假设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续且关于 y 满足李普希茨条件（设李普希茨常数为 L），则方程（5.10）的任意两个解 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在它们存在公共区间 $a\le x\le b$ 内成立不等式

$$\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|\le\left|\varphi(x_0)-\psi(x_0)\right|e^{L|x-x_0|} \tag{5.11}$$

这里 x_0 是 $a\le x\le b$ 内的任一值.

证 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 于公共区间 $a\le x\le b$ 上均有定义，构造函数

$$V(x)=\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2，\ \mathrm{a}\le x\le b$$

两边关于 x 求导数得

$$V'(x)=2\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]\left[f\left(x,\varphi(x)\right)-f\left(x,\psi(x)\right)\right]$$

利用李普希茨条件可得

$$-2LV(x)\le V'(x)\le 2LV(x)$$

于是

$$\frac{d}{dx}\left[V(x)e^{-2Lx}\right]\le 0 \tag{5.12}$$

和

$$\frac{d}{dx}\left[V(x)e^{2Lx}\right]\ge 0 \tag{5.13}$$

对任意 $a\le x\le b$ 的 x 成立. 因此，对于 $x_0\in[a,b]$，若 $x_0\le x\le b$，则上述不等式（5.12）两边从 x_0 到 x 积分得:

$$V(x)\le V(x_0)e^{2L(x-x_0)},\ x_0\le x\le b$$

若 $a\le x\le x_0$，则上述不等式（2.13）两边从 x 到 x_0 积分得

$$V(x)\le V(x_0)e^{2L(x_0-x)},\ a\le x\le x_0$$

两者合起来即为

$$V(x)\le V(x_0)e^{2L|x-x_0|},\ a\le x\le b$$

最后，两边开方即得命题 5. 6 的结论. ■

命题 5. 7 在定理 5.3 的条件下，存在一个有界闭域 $D \subset G$，使得它包含整条积分曲线 $S = \{(x,y) | a \le x \le b, y = \varphi(x, x_0, y_0) \equiv \varphi(x)\}$，且函数 $f(x,y)$ 在 D 满足李普希茨条件.

证 应用有限覆盖定理来证明命题 5. 7. 首先，不难看出 (x, y) 平面上的积分曲线：$S = \{(x,y) | a \le x \le b, y = \varphi(x, x_0, y_0) \equiv \varphi(x)\}$ 是一个有界闭集. 其次，对于 S 上的每一点 (x,y)，必存在一个以它为中心的开圆盘 C，使得在其内函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足李普希茨条件. 这样，根据有限覆盖定理，可以找到有限个具有这种性质的圆盘 C_i（$i = 1, 2, \cdots, N$），它们的全体覆盖整条曲线 S. 设 r_i 为 C_i 的半径，L_i 为 $f(x,y)$ 在 C_i 上的李普希茨常数. 令 $\tilde{G} = \bigcup_{i=1}^{N} C_i$，则 $S \subset \tilde{G} \subset G$，且 $\tilde{G}$（开集）的边界与 S（闭集）的距离 $\rho > 0$. 对预先给定的 $\varepsilon > 0$，若取

$$\eta = \min(\varepsilon, \rho/2) \text{ 及 } L = \max(L_1, L_2, \cdots, L_N) \tag{5.14}$$

则以 S 上每一点为中心，以 η 为半径的圆盘的全体，连同它们的边界构成一个有界闭域 D 即为所求，而且 $S \subset D \subset G$. 命题 5. 7 证毕. ■

现在，来证明定理 5 . 3 . 设 $\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 是满足初始条件 $y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$ 的解（这里 $a \le \bar{x}_0 \le b$），其存在区间为 $[\bar{a}, \bar{b}]$，两个区间 $[a,b]$ 和 $[\bar{a}, \bar{b}]$ 至少包含一个公共点 x_0. 那么根据解的延拓定理，解函数 $\varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 经延拓后得函数 $\psi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 的定义区间不会小于闭区间 $[a,b]$（否则可继续延拓，直到边界或函数值趋于无穷），这蕴含着两个解 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 和 $\psi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ 在公共的闭区间 $[a,b]$ 上有

定义．注意到$\psi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)$在$[a,b]$上是连续的，即对于给定的$\varepsilon$，存在一个正的$\delta_1$，使得当$|\bar{x}_0-x_0|<\delta_1$时有

$$\left|\psi(x,x_0,\bar{y}_0)-\psi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又根据命题 5．7 及命题 5．6 知:

$$\left|\varphi(x,x_0,y_0)-\psi(x,x_0,\bar{y}_0)\right|\le|y_0-\bar{y}_0|e^{L|x-x_0|}\le|y_0-\bar{y}_0|e^{L(b-a)}$$

取$\delta_2=\frac{\varepsilon}{2}e^{-L(b-a)}$，那么当$|y_0-\bar{y}_0|<\delta_2$时有$\left|\varphi(x,x_0,y_0)-\psi(x,x_0,\bar{y}_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$．这样，若取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$时，有

$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x,x_0,y_0)-\psi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\right|\\&\quad\le\left|\varphi(x,x_0,y_0)-\psi(x,x_0,\bar{y}_0)\right|+\left|\psi(x,x_0,\bar{y}_0)-\psi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\right|\\&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

定理 5. 3 证毕. ■

当把解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$视为自变量x和初值(x_0,y_0)的三元函数时，从上述定理可推知它是三元变量(x,x_0,y_0)的连续函数．事实上，由$\varphi(x,x_0,y_0)$对x在闭区间$[a,b]$上连续知，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|\bar{x}-x|<\delta_1$时，有

$$\left|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ x,\bar{x}\in[a,b]$$

另一方面，由解对初值依赖的连续性定理，总存在这样的$\delta_2>0$，使得当$(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta_2^2$时，有

$$\left|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,\bar{x}_0,\bar{y}_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ x\in[a,b]$$

现在取$\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则只要$(x-\bar{x})^2+(\bar{x}_0-x_0)^2+(\bar{y}_0-y_0)^2\le\delta^2$时，就有

$$
\begin{aligned}
&\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right| \\
&\le\left|\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,\bar{y}_0)-\varphi(\bar{x},x_0,y_0)\right|+\left|\varphi(\bar{x},x_0,y_0)-\varphi(x,x_0,y_0)\right| \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

这说明函数$\varphi(x,x_0,y_0)$关于三元变量(x,x_0,y_0)是连续的．于是，得到下列推论．

推论 5.2 假设$f(x,y)$在区域G内连续且关于y满足局部李普希茨条件，则方程（5.1）的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为三元(x,x_0,y_0)的函数在它存在的范围内是连续的．

最后，考察解对初值依赖的可微性．对方程（5.1），我们有下面的定理：

定理 5.3（可微性） 若函数$f(x,y)$以及f'_y都在区域G内连续，则方程（5.1）的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为三元(x,x_0,y_0)的函数在它存在的范围内具有连续的偏导数．

证 由f'_y在区域G内连续，推知$f(x,y)$在G内关于y满足局部李普希茨条件，因此，在定理的假定条件下，解对初值依赖的连续性定理成立，即$y=\varphi(x,x_0,y_0)$作为x,x_0,y_0的函数在它存在的范围内是连续的．下面，进一步证明$\varphi(x,x_0,y_0)$在它存在的范围内任一点的偏导数$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$也存在并且连续．

先证$\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x}$存在且连续．设由初值$(x_0,y_0)\in G$和$(x_0+\Delta x_0,y_0)\in G$（这里假定$|\Delta x|$充分小，以保证两个点$(x_0,y_0)$和$(x_0+\Delta x_0,y_0)$连接的直线段完全位

于G内）所确定的解分别记为

$$y=\varphi\left(x,x_0,y_0\right)=\varphi\ ,\quad y=\varphi\left(x,x_0+\Delta x_0,y_0\right)=\psi$$

即

$$\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(s,\varphi\right)ds\ ,\quad \psi=y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f\left(s,\psi\right)ds$$

于是由微分中值定理知

$$\begin{aligned}\psi-\varphi&=\int_{x_0+\Delta x_0}^{x} f\left(s,\psi\right)ds-\int_{x_0}^{x} f\left(s,\varphi\right)ds\\&=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f\left(s,\psi\right)ds+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f\left(s,\varphi+\theta\left(\psi-\varphi\right)\right)}{\partial y}ds\end{aligned}$$

其中$0<\theta<1$．由f_y'及φ,ψ的连续性，知

$$\frac{\partial f\left(s,\varphi+\theta\left(\psi-\varphi\right)\right)}{\partial y}=\frac{\partial f\left(s,\varphi\right)}{\partial y}+r_1$$

这里r_1具有性质:当$\Delta x_0\to 0$时$r_1\to 0$,且当$\Delta x_0=0$时$r_1=0$．又由积分中值定理，可得

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f\left(s,\psi\right)ds=-f\left(x_0,y_0\right)+r_2$$

这里r_2与r_1具有相同的性质．这样，当$\Delta x_0\neq 0$时，有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}=\left[-f\left(x_0,y_0\right)+r_2\right]+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f\left(s,\varphi\right)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}ds$$

即$z=\dfrac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + r_1 \right] z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) + r_2 = z_0 \end{cases} \tag{5.15}$$

的解，这里Δx_0被看成是系统的参数．显然，当$\Delta x_0 = 0$时，上述初值问题仍然有解存在．根据解对初值和参数依赖的连续性定理，知$\dfrac{\psi - \varphi}{\Delta x_0}$是$x, x_0, z_0, \Delta x_0$的连续函数，从而

$$\lim_{\delta x_0 \to 0} \frac{\psi - \varphi}{\Delta x_0} = \frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$$

存在，而且$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = -f(x_0, y_0) \end{cases}$$

的解．由此不难求得

$$\frac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(s,\varphi)}{\partial y} ds \right)$$

显然，它是x, x_0, y_0的连续函数．

类似地，可证$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_0}$存在且连续．事实上，设$y = \varphi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) = \bar{\psi}$为初值$(x_0, y_0 + \Delta y_0)$（这里$\Delta y_0$与$\Delta x_0$的含义相同）所确定的解．类似上述推演，可证$\dfrac{\bar{\psi} - \varphi}{\Delta y_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f\left(x,\varphi\right)}{\partial y}+r_3\right]z\\ z\left(x_0\right)=1\end{cases}$$

的解，这里r_3具有性质：当$\Delta y_0\to 0$时$r_3\to 0$，且当$\Delta y_0=0$时$r_3=0$. 因此，可求得

$$\frac{\partial\varphi\left(x,x_0,y_0\right)}{\partial y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f\left(s,\varphi\right)}{\partial y}+r_3\right]ds\right)$$

进一步，

$$\frac{\partial\varphi\left(x,x_0,y_0\right)}{\partial y_0}=\lim_{\Delta y_0\to 0}\frac{\overline{\psi}-\varphi}{\Delta y_0}=\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f\left(s,\varphi\right)}{\partial y}ds\right)$$

它是x,x_0,y_0的连续函数.

至于$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$的存在性和连续性，只需要注意到$y=\varphi\left(x,x_0,y_0\right)$是方程（5.1）的解，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f\left(x,\varphi\left(x,x_0,y_0\right)\right)$$

由f和φ的连续性直接推得结论. 定理 5.4 证毕. ■

例 5.4 给定一阶微分方程：$\dfrac{dy}{dx}=x\left(y-1\right)$，设$y=\varphi\left(x;x_0,y_0\right)$是方程满足初始条件$y\left(x_0\right)=y_0$的解，试求导函数：$\left.\dfrac{\partial\varphi\left(x;x_0,y_0\right)}{\partial x}\right|_{x_0=1,y_0=0}$，$\left.\dfrac{\partial\varphi\left(x;x_0,y_0\right)}{\partial x_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}$和$\left.\dfrac{\partial\varphi\left(x;x_0,y_0\right)}{\partial y_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}$的显式表达式.

解 注意到原方程的通解为：$y\left(x\right)=1+ce^{x^2/2}$，其中$c$为任意常数. 满足初始条件$y\left(x_0\right)=y_0$的特解为：

$$y=\varphi(x;x_0,y_0)=1+(y_0-1)e^{(x^2-x_0^2)/2}$$

因此，

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial x}\right|_{x_0=1,y_0=0}=x\left[\varphi(x;x_0,y_0)-1\right]\Big|_{x_0=1,y_0=0}=x(y_0-1)e^{(x^2-x_0^2)/2}\Big|_{x_0=1,y_0=0}=-xe^{(x^2-1)/2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=-x_0(y_0-1)e^{(x^2-x_0^2)/2}\Big|_{x_0=1,y_0=0}=e^{(x^2-1)/2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{x_0=1,y_0=0}=e^{(x^2-x_0^2)/2}\Big|_{x_0=1,y_0=0}=e^{(x^2-1)/2}$$

亦可用上面的公式计算获得相同的结果.

注 5.7 本定理的证明技巧性较高，用到由已知解来构造相关微分方程的技巧（属于微分方程反问题），希望读者领会和掌握有关证明方法的精神实质.

习题 5.1

1. 对于一阶线性微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

(1) 试证明：当 $P(x)$，$Q(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续时，由任一初值 (x_0,y_0)（这里 $x_0\in[\alpha,\beta]$）所确定的解定义在整个区间上 $[\alpha,\beta]$ 上且是连续的.

(2) 若 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，试求 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

2. 考虑下列初值问题的一阶微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=x^2-2y^2,\ (x,y)\in R=\left\{(x,y)\middle|1\le x\le 3,\ |y-1|\le 2\right\}\\ y(-2)=1\end{cases}$$

(1) 试根据解的存在唯一性定理，求其解的存在区间；

(2) 求第三次近似解；

(3) 给出 n 阶近似解的误差估计.

3. 给定一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{1}{3}}$$

(1) 试讨论在什么区域中满足解的存在唯一性定理的条件；

(2) 求过点 $(0,0)$ 的一切解.

4. 设 $f(x)$ 定义在整个实数轴上，并满足条件

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le N\left|x_1-x_2\right|$$

其中 $N<1$ 的非负数，证明代数方程 $x=f(x)$ 存在唯一解.

（**提示：**作逐步逼近序列 $x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$）

5. 给定积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上的已知连续函数，$K(x,y)$ 是方形区域 $a\le x\le b,\ a\le y\le b$ 上的已知连续函数，λ 是一个常数. 证明当 $|\lambda|$ 充分小时，此积分方程在 $[a,b]$ 区间上存在唯一连续解.

（**提示：**作逐步逼近函数序列

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=f(x)\\ \varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds\end{cases}$$

并证明此序列的一致收敛性）

6. 试求方程 $\frac{dy}{dx}=y^2-9$ 分别通过点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{1}{3}\ln 2,0\right)$ 的解的最大存在区间.

7. 假定初值问题

$$\frac{dy}{dx}=-3\cos\left(\frac{2y}{x}\right),\quad y_0(x_0)=y_0$$

的解为 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$，试求 $\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$，$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ 在 $x_0=1$，$y_0=0$ 处的表达式.

8. 证明 Gronwall 不等式

设 K 为非负常数，$f(t)$ 和 $g(t)$ 在区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上非负、连续，且满足不等式

$$f(t)\le K+\int_\alpha^t f(s)g(s)ds,\quad \alpha\le t\le\beta$$

则有估计

$$f(t)\le K\exp\left(\int_\alpha^t g(s)ds\right),\quad \alpha\le t\le\beta$$

9. 假设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内关于 y 是不增函数，试证初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

的解于 $x\ge x_0$ 的侧最多存在一个解．若取

$$f(x,y)=\begin{cases}-2xy & 0\le x,y<1\\ -2y & 1\le x,y\le 2\end{cases},\quad x_0=1,y_0=1$$

试考察相应的系统.

10. 设$y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=2\sin(\lambda xy),\ \varphi(x_0,x_0,y_0,\lambda)=y_0$$

的饱和解，这里λ是参数，试求$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$和$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$在点$(x,0,0,1)$处的表达式.

§5.2 高阶微分方程与微分方程组的基本定理

高阶微分方程与微分方程组的解的存在唯一性定理是一阶微分方程情形的自然推广，因此本节在内容安排上基本与上一节类似，希望读者在阅读时对两者进行比较.

本小节将介绍下列初值问题的线性微分方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta} \tag{5.16}$$

的解的存在唯一定理，以及解对初值的连续依赖性等结果.

现在，我们可以介绍和证明方程组（5.16）的解的存在唯一性定理了.

定理 5.4 （存在唯一性定理） 设$\boldsymbol{A}(t)$是$n\times n$阶，矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是n维列向量，它们都在$a\le t\le b$区间上连续，则对于$a\le t\le b$中的任一数t_0及任一n维常数向量$\boldsymbol{\eta}$，方程组

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5.17}$$

存在唯一解$\boldsymbol{\varphi}(t)$，定义在整个区间$a\le t\le b$上，且满足初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$.

类似于一个未知变量的一阶微分方程的情形，我们可采用逐步逼近法来证明这个定理. 为了更好地理解证明过程，我们分为下列几个命题.

命题 5.10 （等价性）设$\boldsymbol{\varphi}(t)$是方程组（5.16）定义于区间$a \le t \le b$上且满足初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{\eta}$的解，则$\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\right]ds,\ a \le t \le b \tag{5.18}$$

定义于$a \le t \le b$上的连续解；反之亦然.

它的证明完全类似于一阶方程的情形，兹不赘述.

现在，取$\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}$，构造皮卡逐步逼近向量函数序列如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}_0(t)=\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\varphi}_k(t)=\boldsymbol{\eta}+\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s)+\boldsymbol{f}(s)\right]ds\\ k=1,2,\cdots,\quad a \le t \le b\end{cases} \tag{5.19}$$

向量函数$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$称为方程（5.16）的**第$k$次近似解**. 应用数学归纳法即可证明下列命题.

命题 5.11 对于所有的正整数k，向量函数$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在$a \le t \le b$区间上有定义且连续.

下面叙述并证明一致收敛性.

命题 5.12 （一致收敛性）向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a \le t \le b$区间上是一致收敛的.

证 考虑向量函数项级数

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)\right],\ a\le t\le b \tag{5.20}$$

其部分和为

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)+\sum_{j=1}^{k}\left[\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)\right]=\boldsymbol{\varphi}_k(t)$$

因此，要证序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a\le t\le b$区间上一致收敛，只需证级数（5.20）在$a\le t\le b$区间上一致收敛就够了．因为$\boldsymbol{A}(t)$和$\boldsymbol{f}(t)$都在$a\le t\le b$区间上连续，因此它们的范数都在$a\le t\le b$区间上有界，即存在常数$L$和$K$，使得

$$\|\boldsymbol{A}(t)\|\le L \text{ 和 } \|\boldsymbol{f}(t)\|\le K,\ \ a\le t\le b$$

取$M=L\|\boldsymbol{\eta}\|+K$，下面证明向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a\le t\le b$区间上是一致收敛的．对于向量函数级数（5.20），我们有估计

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varphi}_1(t)-\boldsymbol{\varphi}_0(t)\| &\le\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)+\boldsymbol{f}(s)\|ds\right|\\ &\le\left|\int_{t_0}^{t}\left[\|\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_0(s)\|+\|\boldsymbol{f}(s)\|\right]ds\right|\\ &\le\left|\int_{t_0}^{t}\left[L\|\boldsymbol{\eta}\|+K\right]ds\right|=M|t-t_0|\end{aligned}$$

由于

$$\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\|\le\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)[\boldsymbol{\varphi}_2(s)-\boldsymbol{\varphi}_1(s)]\|ds\right|\le\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{A}(s)\|\cdot\|\boldsymbol{\varphi}_2(s)-\boldsymbol{\varphi}_1(s)\|ds\right|$$

因此，可得

$$\|\boldsymbol{\varphi}_2(t)-\boldsymbol{\varphi}_1(t)\|\le L\left|\int_{t_0}^{t}M|s-t_0|ds\right|\le\frac{ML}{2!}|t-t_0|^2$$

现归纳假设

$$\|\boldsymbol{\varphi}_j(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(t)\|\le\frac{ML^{j-1}}{j!}|t-t_0|^j$$

则

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{\varphi}_{j+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_{j}(t)\right\| &\le \left|\int_{t_0}^{t}\left\|\boldsymbol{A}(s)\left[\boldsymbol{\varphi}_{j}(s)-\boldsymbol{\varphi}_{j-1}(s)\right]\right\|ds\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t}\left\|\boldsymbol{A}(s)\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{\varphi}_{2}(s)-\boldsymbol{\varphi}_{1}(s)\right\|ds\right| \\ &\le L\left|\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{j}}{j\,!}\left|s-t_0\right|^{j}ds\right| \le \frac{ML^{j+1}}{(j+1)!}\left|t-t_0\right|^{j+1}\end{aligned}$$

于是，由数学归纳法可知，对所有的正整数k，有下列估计

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_{k}(t)-\boldsymbol{\varphi}_{k}(t)\right\| \le \frac{ML^{k}}{k\,!}\left|t-t_0\right|^{k} \le \frac{ML^{k}}{k\,!}(b-a)^{k},\ a\le t\le b$$

但其最右端项是正项收敛级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ML^{k}}{k\,!}(b-a)^{k}$$

的通项，因而由数学分析的魏氏判别法可知，函数项级数

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_{0}(t)\right\|+\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\boldsymbol{\varphi}_{k}(t)-\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(t)\right\|$$

在$a\le t\le b$区间上是一致收敛的，推出向量函数级数（5.20）在$a\le t\le b$区间上也是一致收敛的．■

根据命题 5.12，可设

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_{k}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)$$

命题 5.13 （连续性）$\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程（5.18）定义在$a\le t\le b$区间上的连续解.

证 根据命题 5.12，向量函数序列$\left\{\boldsymbol{\varphi}_{k}(t)\right\}$在$a\le t\le b$区间上一致收敛到向

量函数$\boldsymbol{\varphi}(t)$，由每个$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$在$a \le t \le b$区间上是连续的，推知$\boldsymbol{\varphi}(t)$在$a \le t \le b$区间上是连续的．由$\boldsymbol{A}(t)$的连续性（因而在$a \le t \le b$区间上有界），推知序列$\{\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a \le t \le b$区间上一致收敛到向量函数$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\varphi}(t)$.

在迭代（5.19）的第二式两边关于k取极限得到

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\varphi}_k(t) &= \boldsymbol{\eta} + \lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s) + \boldsymbol{f}(s)\right]ds \\ &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}\left[\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}_{k-1}(s) + \boldsymbol{f}(s)\right]ds\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\varphi}(s) + \boldsymbol{f}(s)\right]ds$$

这说明$\boldsymbol{\varphi}(t)$是积分方程（5.18）在$a \le t \le b$区间上的连续解. ■

命题 5.14 （唯一性）设$\boldsymbol{\psi}(t)$是积分方程（5.18）定义在$a \le t \le b$区间上的另一个连续解，则在$a \le t \le b$区间上恒有$\boldsymbol{\psi}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t)$.

证 我们证明$\boldsymbol{\psi}(t)$也是向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a \le t \le b$区间上一致收敛的极限向量函数．根据迭代（5.19）及

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t}\left[\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{\psi}(s) + \boldsymbol{f}(s)\right]ds$$

像命题 5.12 进行的估计那样，可得下列估计

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\psi}(t)\right\| \le \frac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}\left|t - t_0\right|^{k+1},\ k = 1, 2, \cdots,\ \ a \le t \le b$$

这里$\tilde{M}$是某个常数，从而对一切正整数k有

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_k(t) - \boldsymbol{\psi}(t)\right\| \le \frac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-a)^{k+1},\ a \le t \le b$$

其右端项是收敛的正项级数

$$\frac{\tilde{M}L^k}{(k+1)!}(b-a)^{k+1}$$

的通项，推知向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$在$a \le t \le b$区间上一致收敛到$\boldsymbol{\psi}(t)$. 再由极限的唯一性知

$$\boldsymbol{\psi}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t),\ a \le t \le b$$

此命题证毕. ■

结合命题 5.10-5.14，存在唯一性定理得到证明.

需要指出的是，线性方程组的解$\boldsymbol{\varphi}(t)$的存在区间是系数矩阵$\boldsymbol{A}(t)$和非齐次项$\boldsymbol{f}(t)$在其连续的整个区间$a \le t \le b$上（主要是因为在构造逐步逼近向量函数序列$\{\boldsymbol{\varphi}_k(t)\}$时，$\boldsymbol{\varphi}_k(t)$的定义区间已经是整个区间$a \le t \le b$），而不像一个未知变量的微分方程情形，其解只在$t_0$的某个小的邻域内存在，然后经过解的延拓才使解定义在更大的区间上.

下一步，考虑下列高阶线性微分方程

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \eta_1,\ x'(t_0) = \eta_2,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0) = \eta_n \end{cases} \tag{5.21}$$

的解的存在唯一性定理. 根据第一章，方程（5.21）与某个n阶线性微分方程的初值问题（5.16）是等价性的，立刻推知n阶线性微分方程的解的存在唯一性定理，即

推论 5.5 如果$a_1(t)$，$a_2(t)$，$\cdots$，$a_n(t)$和$f(t)$都是$a \le t \le b$区间上的连续函

数，则对 $a \le t \le b$ 区间上的任一数 t_0 及任意的 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，方程（5.21）存在唯一解 $w(t)$，它定义在整个区间 $a \le t \le b$、连续且满足初值条件.

最后，我们不加证明地给出一般形式的一阶非线性常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{5.22}$$

的解的存在唯一性定理、解的延拓与连续性定理和解的可微性定理．为方便，记 $G = \{(t,\boldsymbol{x}) \mid |t - t_0| \le a, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \le b\}$，而向量函数 $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 在域 G 上关于 $\boldsymbol{x}$ 满足李普希茨条件是指存在常数 $L > 0$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}} \in G$，有 $\|\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t;\tilde{\boldsymbol{x}})\| \le L\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$.

解的存在唯一性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 在域 G 上连续且关于 $\boldsymbol{x}$ 满足李普希茨条件，则方程（5.22）存在唯一解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$，它定义在区间 $|t - t_0| \le h$ 上、连续且 $\boldsymbol{\varphi}(t_0;t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$，这里 $h = \min(a,\ b/M)$，$M = \max\limits_{(t,\boldsymbol{x}) \in G} \|\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})\|$.

解的延拓与连续性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 在域 G 上连续且关于 $\boldsymbol{x}$ 满足李普希茨条件，则方程（5.22）的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 可以延拓，或者到 $+\infty$（或 $-\infty$），或者使点 $(t,\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0))$ 任意接近区域 G 的边界．而解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 作为 $t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0$ 的函数在它们存在的范围内是连续的.

解的可微性定理 如果向量函数 $\boldsymbol{f}(t;\boldsymbol{x})$ 及 $\partial f_i / \partial x_j$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）在域 G 连续，那么方程（5.22）的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 作为 $t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0$ 的函数在他们存在的范围内是连续可微的.

习题 5.2

1. 将下列各方程的初值问题转化成与之等价的一阶方程组的初值问题

（1） $2x^{(4)}-x'''+3x'-4x=t, x(0)=0, x'(0)=1, x''(0)=-1, x'''(0)=2$

（2） $x''+3x'-3tx=2e^{-t}, x(1)=-1, x'(1)=2$

（3） $x'''=te^{-t}, x'(0)=-1, x''(0)=1$

（4） $\begin{cases} x''+3y'-2x+4y=\sin t \\ x'-y'''+y''-2y-5x=te^{-t} \\ x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=0, y'(0)=1, y''=-1 \end{cases}$

2. 对于满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

的方程组

$$\boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

(1) 试用逐步逼近法求的第三次近似解;

(2) 若 $t\in[-1,1]$，试给出逐步逼近法中 n 阶近似解与精确解之间的误差估计.

3. 对于初值条件

$$x''-2x'+x=t\ ,\quad x(0)=1, x'(0)=-1$$

(1) 试用逐步逼近法求的第三次近似解;

(2) 若 $t\in[-1,1]$, 试给出逐步逼近法中 n 阶近似解与精确解之间的误差估

计.

4. 对于线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ ,\quad \boldsymbol{A} \in R^{n \times n}, \boldsymbol{x} \in R^n$$

（1）试证：对任意的n维不依赖于时间的列向量$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$是此方程的解；

（2）试证：若$\boldsymbol{x}_1(t)$和$\boldsymbol{x}_2(t)$是此方程的两个解，则$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t)$也是它的解，其中$c_1$和$c_2$是任意常数.

（3）若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

试验证：两个函数向量

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

分别是满足初值条件$\boldsymbol{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\boldsymbol{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的特解.

§5.3 数值解法简介

对于刻画实际问题的大多数常微分方程（包括方程组），即使它们满足解的存在唯一性定理的条件，但其解常常不能用初等函数来表示（即没有分析解）. 对于这类方程，除本书第四章介绍其定性理论外，最常用的方法就是数值求解. 事实上，微分方程的数值解法已成为一门独立的学科，也已成为分析微分方程解的强有力工具. 特别是，由于计算机的发展，通过数值

方法及相关的计算机软件求解微分方程，能使我们了解其解随时间或参数变化规律或趋势，而不必要找出分析解.

这里，仅介绍最简单但最常用的两种数值解法，要深入学习，请看有关参考文献[1].

5.3.1 欧拉法

考虑一阶微分方程的初值问题:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \tag{5.23}$$

假定其解存在唯一，并记解为 $y=y(x)$. 从初值条件 $y(x_0)=y_0$ 出发，按一定的步长 h，依某种数值方法逐步计算微分方程解 $y=y(x)$ 的近似解 $y_n\approx y(x_n)$（注意：$y(x_n)$ 是精确解，而 y_n 是近似解），这里 $x_n=x_0+nh$（$n=1,2,\cdots$），这样求出来的解称为**数值解**.

欧拉法的基本思想是用差分代替微分. 此时，方程（5.23）可变成

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\ x_n=x_0+nh \tag{5.24}$$

称为**欧拉（Euler）公式**. 即在 Oxy 平面上，于方程的解曲线上取过点 (x_n,y_n) 的切线（其斜率为 $f(x_n,y_n)$），当 $x=x_{n+1}$ 时，在切线上截取 $y=y_{n+1}$ 作为解的近似值.

注意到，欧拉公式实际是将解在 x_{n+1} 点上的值 $y(x_{n+1})=y(x_n+h)$ 用泰勒级数展开后只取一次项，其局部截断误差为 h^2 的高阶无穷小，即

$$
\begin{aligned}
y(x_{n+1}) &= y(x_n+h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots \\
&= y(x_n) + hf(x_n, y_n) + O(h^2) = y_{n+1} + O(h^2)
\end{aligned}
$$

因此，欧拉公式的局部截断误差可写为:

$$
y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2)
$$

一般地，对于一种数值方法，当其局部截断误差为步长h的$O(h^{p+1})$时，称此方法具有p（为非负数，但可为零）阶精度，因此，欧拉法具有 1 阶精度.

注意到，微分方程初值问题（5.23）的解等价于下列积分形式

$$
y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds
$$

的解. 利用定积分的梯形公式作近似代换，可得

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s))ds \\
&\approx y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]ds \\
&= y_n + \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right](x_{n+1} - x_n)
\end{aligned}
$$

上式中包含未知值y_{n+1}，但其值可用欧拉公式来计算，即先用欧拉公式进行预测，再用上述梯形公式校正，得计算公式

$$
\begin{cases}
\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\right]
\end{cases}
\tag{5.25}
$$

此方法称为**改进的欧拉法**.

现计算其精度，考虑以半步长为增量的泰勒级数展开式

$$y\left(x_{n+\frac{1}{2}}\right)\equiv y\left(x_n+\frac{h}{2}\right)=y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n)+\frac{h^2}{8}y''(x_n)+O(h^3)$$

$$=y\left(x_{n+1-\frac{1}{2}}\right)=y\left(x_{n+1}-\frac{h}{2}\right)$$

$$=y(x_{n+1})-\frac{h}{2}y'(x_{n+1})+\frac{h^2}{8}y''(x_{n+1})+O(h^3)$$

因为$y''(x_{n+1})=y''(x_n+h)=y''(x_n)+hy'''(\eta)$，这里$\eta$是介于$x_n$与$x_n+h$之间的数，因此，比较上面的两式，并利用$y_n=y(x_n)$，可得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+(f_{n+1}+f_n)\frac{h}{2}+O(h^3)=y_{n+1}+O(h^3)$$

这里y_{n+1}是利用改进的欧拉法计算当$x=x_{n+1}$时的$y=y(x)$的值，因此，改进的欧拉法具有 2 阶精度，比原来的欧拉法的精度提高 1 阶.

5.3.2 龙格-库塔法

龙格-库塔（Runge-Kuta）法是一种求解常微分解的常用方法，其基本思想是利用间接的泰勒级数求微分方程的数值解. 导出龙格-库塔法的大致过程如下.

由二元函数的微分中值定理知

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h)\right)=y_n+hk^*(x_n,y_n,h) \tag{5.26}$$

这里$k^*(x_n,y_n,h)=f\left(x_n+\theta h,y(x_n+\theta h)\right)$称为函数$f$在区间$[x_n,\ x_{n+1}]$上的平均斜率. 当$h=0$时，$k^*(x_n,y_n,0)=f\left(x_n,y(x_n)\right)$. 对于$h\neq 0$，可通过$[x_n,\ x_{n+1}]$上取若干点的斜率的线性组合来确定$k^*(x_n,y_n,h)$

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}\lambda_i k_i \tag{5.27}$$

这里λ_i称为加权因子，k_i为第i小段曲线的斜率，共有r段．第一段取$k_1 = f_n = f(x_n, y_n)$，然后逐步递推

$$k_j = f\left(x_n + d_j h, y_n + h\sum_{s=1}^{j-1}\beta_{js}k_s\right), j = 1, 2, \cdots \tag{5.28}$$

这里所有的d_j和β_{js}待定．式（5.27）连同式（5.28）称为r段的**龙格-库塔公式**.

选定λ_i，d_j和β_{js}使r段的龙格-库塔公式有尽可能高的阶的精度．显然，精度是r的函数，记为$p(r)$．考虑$r = 2$，应用双变量泰勒级数展开知

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(x_n + d_2 h, y_n + \beta_{21}k_1 h\right) \\
&= f\left(x_n, y_n\right) + h\left(d_2\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(x_n, y_n\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}\left(d_2\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-1} f\left(x_n, y_n\right) + O\left(h^p\right)
\end{aligned}$$

将其代人龙格-库塔公式，并整理得

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)f\left(x_n, y_n\right) + h^2\lambda_2\left(d_2\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(x_n, y_n\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{\lambda_2 h^{p-1}}{(p-1)!}\left(d_2\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21}k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p-1} f\left(x_n, y_n\right) + O\left(h^p\right)
\end{aligned}$$

将上式与泰勒级数展开作对比，并对h和h^2所对应的项，分别令它们的系数相同，可得

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \lambda_2 d_2 = \frac{1}{2},\ \lambda_2\beta_{21} = \frac{1}{2}$$

而要h^3项系数相同的条件更多且无法同时满足．因此$r = 2$时，龙格-库塔公

式的精度的最大阶数为 $p(2)=2$．取 d_2 为自由参数，则上述条件变为

$$\lambda_1=1-\frac{1}{2d_2},\ \lambda_2=\frac{1}{2d_2},\ \beta_{21}=d_2$$

当 $d_2=1$ 时，对应改进的龙格-库塔法．此外，可取 $d_2=1/2$、$2/3$ 等得到常用的 2 阶龙格-库塔公式，特别是，取 $d_2=1/2$，得 2 阶龙格-库塔公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hk_2 \\ k_1=f\left(x_n,y_n\right),\ k_2=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}k_1\right) \end{cases} \tag{5.29}$$

用同样的方法可分析高阶 2 阶龙格-库塔公式．对 $r=3$，2 阶龙格-库塔公式有 8 个系数应满足 6 个等式，因此有两个自由参数，其最大精度阶为 $p(3)=3$．

可以证明，当 $r\le 4$ 时，$p(r)=r$；当 $r=5,6,7$ 时，$p(r)=r-1$；当 $r=8,9$ 时，$p(r)=r-2$．由于 4 阶以上的龙格-库塔公式的计算工作量太大，而精度提高较慢，因此，最为常用的方法是具有 4 阶精度的 4 段龙格-库塔公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right) \\ k_1=f\left(x_n,y_n\right) \\ k_2=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}k_2\right) \\ k_4=f\left(x_n+h,y_n+k_3\right) \end{cases} \tag{5.30}$$

一方面，对于龙格-库塔公式（5.30），必须保证当 $h\to 0$ 时平均斜率趋于真正斜率，即要求

$$k^*(x_n, y_n, 0) = \lim_{h\to 0}\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'(x_n) = f(x_n, y_n)$$

这个必要条件称为**相容性条件**，它可用局部截断误差的阶数来表示其相容的程度.

另一方面，理论上的数值解的计算必须保证当$h \to 0$时其解收敛到精确解（称为**收敛性问题**），即

$$\lim_{h\to 0, x_n \to x} y_n = y(x)$$

收敛性可用整体误差$e_n = |y(x_n) - y_n|$来刻画，一般地，整体误差包括从初值条件$y(x_0) = y_0$开始由x_0到x_n每步产生的局部截断误差与舍人误差积累的总和.对于某一计算方法，如存在正数M，使整体误差为$e_n \le Mh^p$，则称该方法为 ***p*** **阶收敛**的.

虽然相容性条件表示以计算公式的解的变化率为极限，而收敛性表示以计算公式的解为极限，两者概念不同，但只要微分方程满足一定的条件，则两者是等价的，例如，忽略舍人误差，而平均斜率函数$k^*(x_n, y_n, h)$满足关于y的李普希茨条件，则p阶相容性的计算方法一定是p阶收敛的，即有误差估计$e_n \le Mh^p$.

一般地，舍人误差是由于计算机字长、函数的计算精度以及定点或浮点运算等多种原因导致，分析起来较困难，但可当作随机变量来处理. 若同时考虑截断误差和舍人误差，则整体误差将变为$e_n \le Mh^p + \frac{\varepsilon}{h}$，这里$\varepsilon$为每步计算时舍人误差的上界，这表明缩小步长会减少截断误差，但因为步数增加

又会加大舍人误差，因此计算时必须选取合适的步长，在截断误差的积累和舍人误差的积累之间取得平衡.

最后，我们指出，现在已有某些软件可用来求微分方程的数值解，如 MATLAB 软件就专门备有求常微分方程数值解的函数子程序如 ode15s、ode23s 等，直接调用即可使用.

习题 5.3

1. 试导出 4 阶龙格-库达法的计算公式（5.30），并证明其收敛阶为 4.

2. 自己找一个常微分方程例子，用 MATLAB 软件编程算出数值结果，并绘制轨线的相图.

参考文献

1. 胡建伟，汤怀民. 微分方程数值方法. 北京：科学出版社，1999.

第六章 稳定性理论简介

第二章到第四章给出了求某些微分方程分析解（包括通解）的若干方法．假如对一个微分方程，我们能够找到它的通解，则相应的微分方程称为**可解系统**（为方便，以下常称微分方程为**系统**）．显然，对于可解系统，其所有的轨线行为（或性态）应该是清楚的．然而，在实际中，能够找到通解的微分方程少之又少，事实上，许多微分方程一般是无法找到或无法给出通解的．一个自然的问题是：在无法给出通解或不需要给出通解的情况下，能否通过分析仍然可以知道系统的某些轨线性态等．答案是肯定的，这就是微分方程定性理论的基本内容．

所谓常微分方程的定性理论，简单地讲，就是在不需要（其实也不必要）知道方程的具体显式（通）解时，通过数学分析的办法也能够得出其轨线的变化趋势、特性和分岔（参数变化）等性态．为理解起见，这里举个例子来说明之．考虑下列微分方程（或系统）

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x\left(a - x^2 - y^2\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y\left(a - x^2 - y^2\right) \end{cases} \tag{A}$$

这里a是系统的参数．不难看出：对于所有的$a \le 0$，$(x,y)=(0,0)$是系统（A）的唯一定态．若引进极坐标变换$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$（非奇异变换），则方程（A）变成（或等价于）

$$\begin{cases} r' = r\left(a - r^2\right) \\ \theta' = -1 \end{cases} \tag{B}$$

因此，当$a \le 0$时，$\dot{r} < 0$，而且不难证明当$t \to +\infty$时，$r \to 0^+$．于是当$t \to +\infty$时，$x(t) \to 0$和$y(t) \to 0$，这蕴含着当$t \to +\infty$时，系统（A）的所有轨线均趋于原点

（即系统的唯一定态是全局稳定的）．另一方面，当$a>0$时，方程（B）有一个特别解$r=\sqrt{a}$，蕴含着方程（A）有一个周期解$x=\sqrt{a}\cos\theta$，$y=\sqrt{a}\sin\theta$，这种解实际是从$a=0$分岔而来，即当从$a<0$变化到$a>0$时，系统从唯一稳定的定态“跳”出一个周期解．而且，当$a>0$时，这种周期解也是稳定的，即系统（A）当$a>0$时的所有轨线最终趋于此周期轨，这是因为在周期解的内部，即$r<\sqrt{a}$，有$r'>0$，而在周期轨的外部，即$r>\sqrt{a}$，有$r'<0$．换句话说，当$a\leq 0$是，系统（A）有唯一全局稳定的定态，而当$a>0$时，定态的稳定性失去，但系统出现一个新的且稳定的周期轨．这里，所有涉及的概念将在本章和下章给出严格的数学定义．

这个例子表明，我们不必求出方程的通解，但通过分析的办法能够得出从相平面上任意一点出发的轨线最终都收敛到系统具有特定性质的解（如定态或周期轨等)，而且当系统参数变动时，系统从稳定的定态分岔出一个新解（稳定的周期轨，此时，原来的定态已失去稳定）．这样，系统（A）的所有轨线性态是清楚的，这就是定性理论的奇妙功效．此外，我们指出，为了弄清楚一个微分方程（如系统（A））的所有轨线性态，实际需要做两件事情：一是稳定性分析（如定态的稳定性分析、周期轨的稳定性分析)；二是分岔分析，即分析当系统参数变动时，系统的轨线性态会发生何种变化．

微分方程的定性理论非常丰富，主要内容包括运动稳定性理论和分岔理论(看本章下面细化内容)．定性理论已经成为非线性学科的一个重要分支，也是了解和研究非线性系统的重要手段．本章将简单地介绍常微分方程定性理论的基本概念、基本方法和主要结果，这些体现在定态稳定性分析，判断定态稳定性的李亚谱诺夫（Lyapunov）方法，极限环（一种周期轨）的存在性及其稳定性等．这些理论是深入学习和研究微分方程定性理论的

基础，也是了解常微分方程的轨线性态与特征的有效手段.

一个微分方程系统可以包含参数，亦可不包含参数。本章考虑系统不包含参数的情形，下一章考虑系统包含参数的情形.

§6.1　定态及其局部稳定性

6.1.1　定态与线性化方程

考虑下列自治微分方程：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in W\subset R^n,\quad \boldsymbol{f}:W\to R^n \tag{6.1}$$

这里W是R^n中的开集，假定函数$\boldsymbol{f}$是充分可微（或解析）的．若存在$\boldsymbol{x}^*\in W$，使$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right)=0$，则称$\boldsymbol{x}^*$为系统（6.1）的**定态**（又称为**平衡点**、**不动点**、**静态**等）．显然，$\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}^*$是系统（6.1）的解，这种解亦称为系统的**平凡解**．求出系统的定态（即求解一个代数方程）是进行定态稳定性分析的第一步.

例 6.1 求系统

$$\begin{cases}x'=15\left(y-x\right)\\ y'=11x-xz+y\\ z'=xy-3z\end{cases}$$

的静态.

解 令

$$15\left(y-x\right)=0,11x-xz+y=0,xy-3z=0$$

则由第一、第三式得$y=x,z=\dfrac{1}{3}x^2$，代人到第二式得$x^3=36x$，解之得$x_1=0$，$x_2=6$，$x_3=-6$．因此，$y_1=z_1=0$，$y_2=6$，$y_3=-6$，$z_2=z_3=12$．这样，原系统

有三个静态： $O_1(0,0,0)$， $O_2(6,6,12)$， $O_3(-6,-6,12)$.

常常，微分方程含有参数，这时系统的静态可能依赖于参数.

例 6.2 第一章提到的布鲁塞尔振子，其数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu - (a+1)x + x^2 y \\ \dfrac{dy}{dt} = ax - x^2 y \end{cases}$$

这里，系统有两个参数 $a>0$ 和 $\mu>0$. 令

$$\mu - (a+1)x + x^2 y = 0$$
$$ax - x^2 y = 0$$

两式相加得 $\tilde{x}=\mu$，代人第二式得 $\tilde{y}=\mu/a$. 因此，求得此系统的唯一定态 $(\mu, a/\mu)$，它明显地依赖于系统的两个参数.

下一步，考察系统在静态处的线性化方程. 在定态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 的某个小邻域内，作平移变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$ 或 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^*$，并对函数 $\boldsymbol{f}$ 进行泰勒展开到一次项，则方程（6.1）变成

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) + D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{O}\left(\|\boldsymbol{y}\|^2\right) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{O}\left(\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$$

这里 D 称为**导算子**，$\boldsymbol{O}\left(\|\boldsymbol{y}\|^2\right)$ 代表高阶项. 若记 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n(\boldsymbol{x})\right]^T$，

$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，则

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

省略高阶项，得到下列线性方程

$$\boldsymbol{y}' = D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right)\boldsymbol{y} \tag{6.2}$$

它称为系统（6.1）在定态$\boldsymbol{x}^*$处的**线性化方程**，其中$\boldsymbol{J} \equiv D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right)$称为**雅可比**（Jacob）**矩阵**.下列代数方程

$$\det\left(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}\right) \equiv \left|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}\right| = 0 \tag{6.3}$$

（这里$\boldsymbol{E}$是$n \times n$阶单位矩阵）称为矩阵$\boldsymbol{J}$的**特征方程**，其根称为矩阵$\boldsymbol{J}$的**特征值**（或**特征根**）.

若矩阵$\boldsymbol{J}$的所有特征值的实部均小于零，则方程（6.1）的定态$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$是系统（6.1）一个**汇**；若$\boldsymbol{J}$的所有特征值的实部均大于零，则定态$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$是系统（6.1）的一个**源**;若$J$的所有特征值的实部非零,则系统（6.1）的定态$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$是**双曲型**的. 这些概念对常微分方程的定态分类是重要的,后面的内容将会有详细的讨论.

不失一般性，设$\boldsymbol{x}^* = 0$（否则，使用平移变换）. 现在，引进稳定性的概念. 对于方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\left(t_0\right) = \boldsymbol{x}_0 \tag{6.4}$$

其中$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

定义 6.1 对于方程（6.4），如果对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$（一般与ε和t_0有关），使得对任意满足$\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$的$\boldsymbol{x}_0$，方程（6.4）的解$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$对一切$t \geq t_0$均有$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\| < \varepsilon$，则系统（6.4）的零解$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是**稳定**的；如果$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是稳定的，

且存在这样的$\delta_0>0$使得当$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta_0$时，方程（6.4）的解$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$均有$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$，则称零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是**渐近稳定**的；如果$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是渐近稳定的，且存在域$D_0$，当且仅当$\boldsymbol{x}_0\in D_0$时的解$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$均有$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$，则$D_0$称为**稳定域**或**吸引域**（或**盆**）. 如稳定域为全空间，即$\delta_0=+\infty$，则称零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$为**全局渐近稳定**的或称为**全局稳定**的;如果对某个给定$\varepsilon>0$,不管$\delta>0$怎么小,总有某个$\boldsymbol{x}_0$满足$\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$，使得由初值$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$确定的解$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$，至少存在某个$t_1>t_0$，使得$\|\boldsymbol{x}(t_1)\|=\varepsilon$，则称零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$是**不稳定**的.

例 6.3 考虑一阶线性微分方程:$x'=-2x$. 显然,$x(t)\equiv 0$是它的一个解(静态）. 此外，方程的通解为：$x(t)=ce^{-2t}$（其中c为任意常数）. 满足初始条件$x(t_0)=\eta$的解为：$x(t)=\eta e^{-2(t-t_0)}$. 对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则当$t\geq t_0$时，我们有$|x(t)|<\varepsilon$. 因此，$x(t)\equiv 0$是稳定的，而且是渐近稳定的. 此外，$x(t)\equiv 0$的吸引盆为整个实数轴. 此外,微分方程:$x'=0$满足$x(t_0)=x_0$的解为$x(t)=x_0$，显然$x=0$是稳定的，但不是渐近稳定的.

6.1.2　平面系统轨线的性态

根据雅可比矩阵$\boldsymbol{J}$的特征值的符号和稳定性的定义,我们既可分类系统定态的类型，又可勾画出系统在相平面上定态邻近的轨线性态. 为清楚起见，考虑二维情形. 对于平面自治系统:

$$\begin{cases} x'=P(x,y) \\ y'=Q(x,y) \end{cases} \tag{6.5}$$

假定函数P和Q是连续可微的. 设$\bar{\boldsymbol{z}}=(x_0,y_0)$为系统（4.5）的定态. 在$\bar{\boldsymbol{z}}$处的

雅可比矩阵记为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，则有下列线性化方程

$$\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{J}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\boldsymbol{z} \tag{6.6}$$

矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \tag{6.7}$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 是 2×2 阶单位矩阵. 根据代数学的知识，我们能够把矩阵 $\boldsymbol{J}$ 变成所谓的约当（Jordan）标准型，即能够找到一个非奇异的 2×2 阶矩阵 $\boldsymbol{W}$ ，使得若作线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{W}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$，则方程（6.6）可变成

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

这里 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{W}$ （它是 $\boldsymbol{J}$ 的相似矩阵）具有下列标准形式之一

（1）$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$；（5）$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$

其中五个矩阵中的符号元素可通过解代数方程（6.7）直接给出. 有时，方程（6.8）直接称为原方程（6.5）在定态 $\bar{\boldsymbol{z}}$ 的线性化方程.

现在，对于具有标准型系数矩阵的线性微分方程（6.8），我们能够知道此系统的轨线性态，具体细节如下.

（1）**鞍点：** $\boldsymbol{A}$ 有一对异号的实特征值.

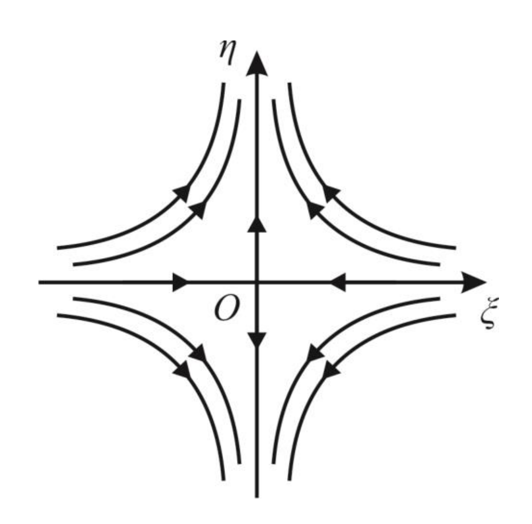


图 6.1 鞍点型轨线的性态.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$，这里$\lambda<0<\mu$或$\lambda>0>\mu$. 方程（6.8）有下列形式的通解

$$\xi=k_1e^{\lambda t},\quad \eta=k_2e^{\mu t} \tag{6.9}$$

其中k_1和k_2是任意常数，由初值决定.

当$k_2=0$时，方程（6.8）的轨线分别为ξ轴的左、右半轴，依赖于k_1的符号，且当$t\to+\infty$时，左右半轴轨线趋于原点；若$k_1=0$，则方程（6.8）的轨线分别为η轴的上、下半轴，依赖于k_2的符号，且当$t\to+\infty$时，上下半轨线远离原点. 当$k_1k_2\neq 0$时，则由式（6.9）知，当$t\to+\infty$时，$\xi(t)\to 0$而$\eta(t)\to\infty$，即轨线趋于η轴，如图 6.1 所示. 这种类型的定态称为**鞍点**. 由上面的讨论知，**鞍点总是不稳定的**. 若$\lambda>0>\mu$，则轨线的性态与图 6.1 所示的性态相反.

（2）**结点：** $\boldsymbol{A}$有一双互异的同号特征值.

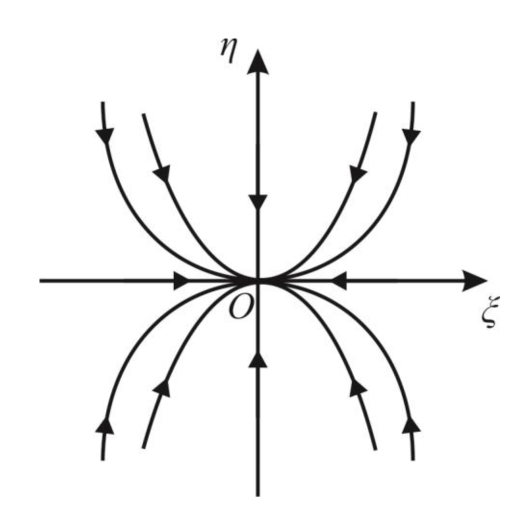


图 6.2 稳定结点型轨线的性态.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$，这里$\mu<\lambda<0$或$\mu>\lambda>0$. 方程（6.8）仍有形如（6.9）形式的解，但假如$\mu<\lambda<0$，则无论k_1和k_2的值如何，当$t\to+\infty$时，总有$\xi(t)\to 0$和$\eta(t)\to 0$，其中ξ轴的左、右半轴，以及η的上、下半轴均为系统的轨线；此外，假如$k_1\neq 0$，则轨线上任意一点的斜率$k=\dfrac{\eta(t)}{\xi(t)}=\dfrac{k_2}{k_1}e^{(\mu-\lambda)t}\to 0$，相应轨线（即$\eta=A|\xi|^{\mu/\lambda}$）的性态如图 6.2 所示. 这种情况对应于**稳定结点**. 假如$\mu>\lambda>0$，则对应于**不稳定结点**，其轨线的性态与图 6.2 所示的轨线性态正好相反.

（3）**临界结点：** $\boldsymbol{A}$有重的非零特征值，但可对角化.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，这里$\lambda$小于或大于零. 方程（6.8）有如（6.9）形式的解. 显然，假如$\lambda<0$，则当$t\to+\infty$时，总有$\xi(t)\to 0$和$\eta(t)\to 0$；而且，假

如 $k_1 \neq 0$，则 $\eta = \frac{k_2}{k_1}\xi$，此时，轨线是趋于原点的半射线，参考图 6.3. 对于这种情形，临界结点是稳定的. 假如 $\lambda > 0$，则临界结点是不稳定的，其相图与图 6.3 所示的相图正好相反.

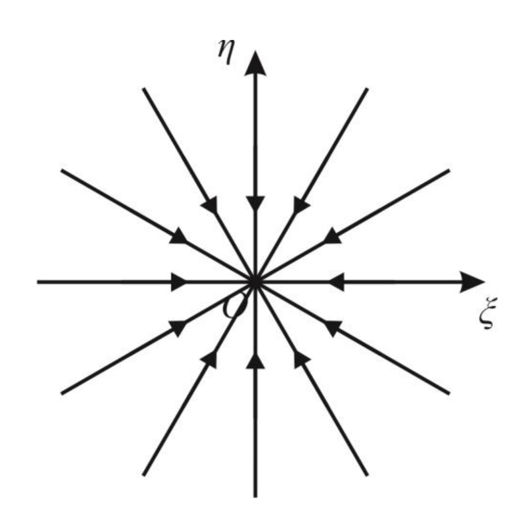


图 6.3 稳定的临界结点型轨线的性态.

（4）**非正常结点：** $\boldsymbol{A}$ 有重的非零特征值，但不可对角化.

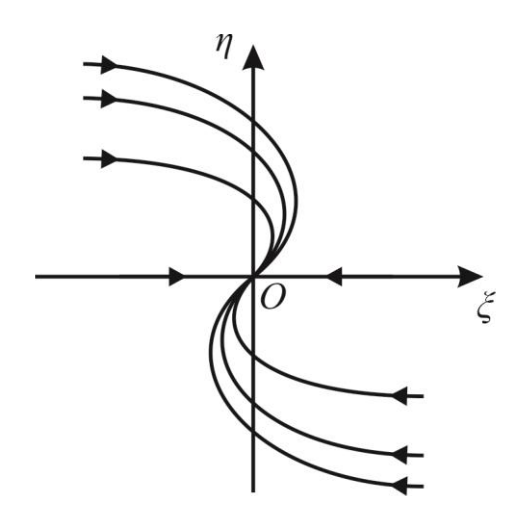


图 6.4 稳定的非正常结点型轨线的性态.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，这里$\lambda$小于或大于零．方程（6.8）有通解：$\xi(t)=(k_1t+k_2)e^{\lambda t}$，$\eta(t)=k_1e^{\lambda t}$，其中$k_1$和$k_2$是任意常数，由初值决定．显然，假如$\lambda<0$，则当$t\to+\infty$时，总有$\xi(t)\to 0$和$\eta(t)\to 0$；而且，假如$k_1=0$，则$\xi$轴的左、右半轴本身也是轨线；假如$k_1\neq 0$，则当$t\to+\infty$时有$k=\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\frac{k_1}{k_1t+k_2}\to 0$，且当$t=-\frac{k_2}{k_1}$（假定$k_1k_2<0$）时，有$\xi(t)=0$，因此轨线越过$\eta$轴而相切于$\xi$轴趋于原点，参考图 6.4．可见，此时非正常结点是稳定的．假如$\lambda>0$，则非正常临界结点是不稳定的，其轨线的性态与图 6.4 所示的轨线性态正好相反.

（5）**焦点：**$\boldsymbol{A}$有非零实部的复特征值（虚部不为零）.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$，这里$a$小于或大于零．方程（6.8）有通解形式：$\xi(t)=qe^{at}\cos(bt+\varphi)$，$\eta(t)=qe^{at}\sin(bt+\varphi)$，其中$q$和$\varphi$是任意常数，由初值决定；$b$的符号决定螺旋的方向．引入极坐标：$\xi=r\cos\theta$，$\eta=r\sin\theta$，则可获得

$$\frac{dr}{dt}=ar\,,\quad \frac{d\theta}{dt}=b$$

由此，我们得到方程（6.8）解的极坐标表示

$$r=k_1e^{at}\,,\quad \theta=bt+k_2$$

其中$k_1>0$，k_2为任意常数.

从上面解的极坐标表达式可看出，轨线是一族对数螺旋线，依顺（逆）

时针方向盘旋地趋于原点，如图 6.5 所示（这里$b<0$）. 假如$a<0$，则焦点是稳定的；假如$a>0$，则焦点是不稳定的.

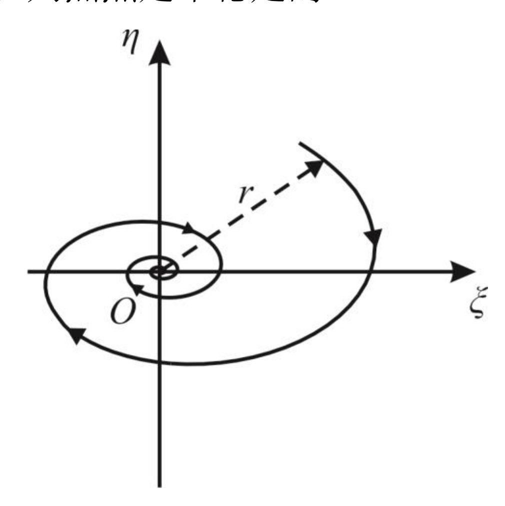


图 6.5 稳定的焦点型轨线的性态.

（6）**中心：** $\boldsymbol{A}$ 的特征值为纯虚数.

此时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{bmatrix}$. 方程（4.8）有通解：$\xi(t)=k_1\cos bt-k_2\sin bt$，$\eta(t)=k_1\sin bt+k_2\cos bt$，这里$k_1$和$k_2$是任意常数，由初值决定；$b$ 的符号决定旋转的方向. 中心型轨线的性态为一族同心圆，如图 6.6 所示（这里$b>0$）.

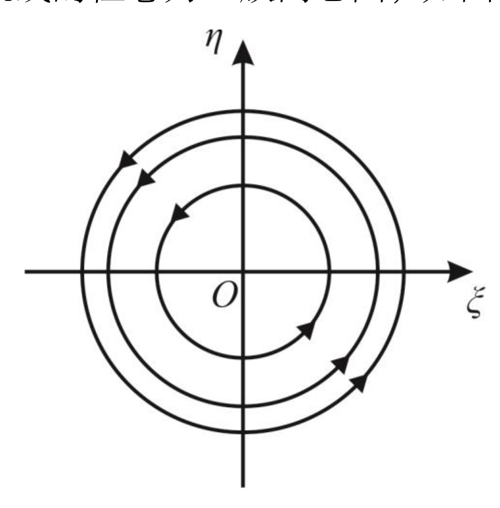


图 6.6 中心型轨线的性态.

注意到，上面所有轨线的性态是对应于雅可比矩阵是约当标准型的情形.然而，对原线性方程的轨线在相平面上的性态可能要经过平移和拉伸变换才能得到，这是因为两者之间的坐标关系为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \boldsymbol{W} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}$$

这里 $\boldsymbol{W}$ 是一个 2×2 阶的非奇异常数矩阵.

最后，我们总结出平面自治线性系统的稳定性区域. 对于方程

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，用 T 表示此矩阵的迹，即 $T = Tr(\boldsymbol{J}) = a_{11} + a_{22}$，用 D 表示 $\boldsymbol{J}$ 的行列式，即

$$D = \det(\boldsymbol{J}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

则矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的特征多项式为

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

特征值为 $\left(T \pm \sqrt{\Delta}\right)/2$，这里 $\Delta = T^2 - 4D$. 若把 T 和 D 作为参数，则根据上面的分析，可获得图 6.7 所示的稳定性区域和定态类型.

对于高阶微分方程系统，其定态的分类比较复杂，依赖于相应特征多项式的根的实部的符号. 特别是，当特征值的实部为零（即临界情形）时，定态附近的轨线的性态一般都很复杂，这里不做详细讨论.

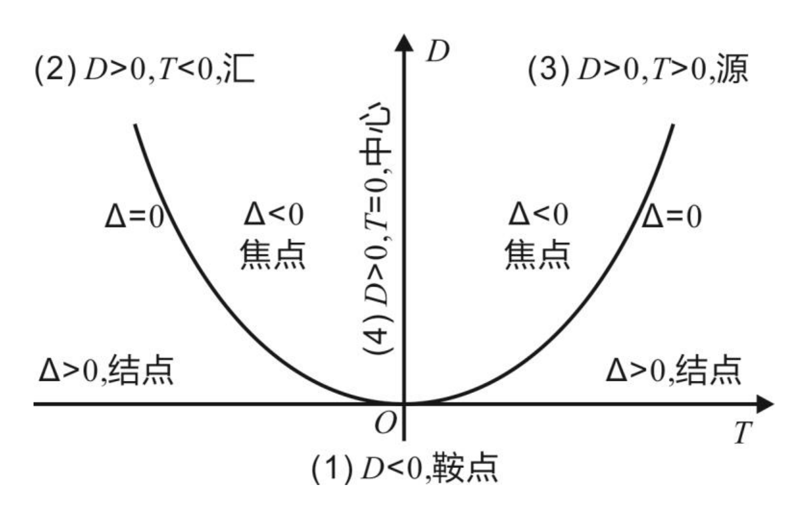


图 6.7 平面线性系统的稳定性区域和定态类型.

6.1.3　高维系统中定态的局部稳定性

上一小节解决了线性方程的轨线的性态问题．一个自然的问题是非线性方程的轨线在定态邻近的性态如何？它和线性化系统的轨线性态有何种关系？为此，考虑下列初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x} \in R^n \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{6.10}$$

的微分方程，这里 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ （列向量）．注意到，原微分方程可表示成下列形式:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)\right]$$

这里 $\boldsymbol{x}^*$ 假定为系统的定态，$\boldsymbol{A}$ 为系统（6.10）在 $\boldsymbol{x}^*$ 处的线性化方程的雅可比矩阵，括号中的函数代表高阶项，在 $\boldsymbol{x}^*$ 的小邻域内可表示为 $O\left(\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right\|^2\right)$．不妨设 $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ ，即设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = 0$ ，否则的话，对 $\boldsymbol{x}$ 作平移变换 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*$.

现在，引入下列一阶常系数线性微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.11}$$

由第三章的知识，可知方程（6.11）的任一解（通解）的分量x_i均可表示成

$$\sum_{m=0}^{l_i} c_{im} t^m e^{\lambda_i t}，\ 1\le i\le n$$

这种线性组合的形式，这里λ_i为方程（6.11）系数矩阵的特征方程

$$\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}\right)=0 \tag{6.12}$$

的根（其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵），l_i为零或正整数（由根λ_i的重数决定）．由此，我们能够得到

定理 6.1（线性稳定性定理） 若特征方程（6.12）的根均具有负实部，则方程组（6.11）的零解是渐近稳定的；若特征方程（6.12）的某个根具有正实部，则方程组（6.11）的零解是不稳定的；若特征方程（6.12）没有正实部的根（即实部或为零或为负数），则方程组（6.11）的零解可能是稳定的也可能是不稳定的，但当零根或具有零实部的根的重数等于 1 时，解是有界的且是稳定的.

证 根据第三章的结果，可知方程（6.11）满足初始向量$\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\eta}$的解$\boldsymbol{\varphi}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t}\left[\sum_{i=0}^{\ell_j-1}\frac{t^i}{i!}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_j \boldsymbol{E}\right)^i\right]\boldsymbol{\upsilon}_j$$

这里$\boldsymbol{\upsilon}_j$为矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值λ_j所对应的特征向量，ℓ_j为λ_j的重数，初始向量$\boldsymbol{\eta}$能够分解成

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2 + \cdots + \boldsymbol{\upsilon}_k \,, \quad \sum_{i=1}^{k} \ell_i = n$$

由指数函数的性质，我们知道该定理的前两个结论成立.

现在，设$\lambda_j = \alpha_j + \beta_j\sqrt{-1}$（这里$\alpha_j \le 0$）. 若存在某个$\alpha_{j_0} = 0$且$\ell_{j_0} > 1$，则当$t \to +\infty$时，由于上面$\boldsymbol{\varphi}(t)$的表达式中对应于$\alpha_j = 0$括号内的项为$t$的非零次多项式，因此$\boldsymbol{\varphi}(t)$趋于无穷。这样，零解是不稳定的；若对所有满足$\alpha_j = 0$的$\ell_j$有$\ell_j = 1$，则由于上面$\boldsymbol{\varphi}(t)$的表达式中对应于$\alpha_j = 0$括号的项为 1，因此$\boldsymbol{\varphi}(t)$是有界的. 而且，根据稳定性的定义，解是稳定的. 定理证毕. ■

下一步，我们把非线性方程（6.10）改写成下列形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \tag{6.13}$$

其中$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，且满足$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$及

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to 0} \frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = 0 \tag{6.14}$$

显然，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$是方程（6.13）的零解（定态）. 在方程（6.13）中，高阶项$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$能够认为是线性方程（6.11）的扰动。因此，非线性方程（6.13）实际是线性方程（6.11）的**扰动方程**.

一个自然的问题是：扰动方程（6.13）的零解$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的稳定性与线性方程（6.11）的零解的稳定性之间有何种关系. 对此，有下面的局部稳定性定理.

定理 6.2（局部稳定性定理） 若系统的定态是双曲型的（即雅可比矩阵的特征值实部均不为零），则在定态的小邻域内，非线性方程（6.13）零解

的稳定性与其线性化方程零解的稳定性是一致的，即当特征方程（6.12）的根均具有负实部时，则方程组（6.13）的零解是局部渐近稳定的；当特征方程（6.12）存在具有正实部的根时，则方程组（6.13）的零解是不稳定的.

这一定理的证明将放在我们引进V函数后给出（看下节的内容）.

至于特征方程（6.12）的根除负实部外，还有零根或零实部的根的情形，非线性方程(6.13)零解的稳定性并不能由线性化方程零解的稳定性来决定，而需要进一步的判断. 事实上，我们能找到这样的例子，当$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$变动时（但条件（6.14）仍被满足），可使非线性方程（6.13）的零解是稳定的，也可是不稳定的，这种情形称为**临界情形**. 如何解决临界情形时的稳定性问题，是常微分方程稳定性理论的重大课题.

例 6.4 考虑布鲁塞尔振子的数学模型（看第一章的第三节），不难显示出此系统有唯一定态$(\bar{x},\bar{y})=(\mu,a/\mu)$，且在定态处的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-1 & \mu^2 \\ -a & -\mu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

因此，雅可比矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a-1 & \mu^2 \\ -a & -\mu^2 \end{bmatrix}$，其特征方程为$\lambda^2+\left(1+\mu^2-a\right)\lambda+\mu^2=0$，相应的特征值为$\lambda_{1,2}=\dfrac{a-1-\mu^2\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-a\right)^2-4\mu^2}}{2}$. 进一步，不难显示出，当$a\le(1-\mu)^2$或$a\ge(1+\mu)^2$时，两个特征值是实的，而当$(1-\mu)^2<a<(1+\mu)^2$时，两个特征值是复的. 而且，当$a\le(1-\mu)^2$时，两个实特征值是负的，因此定态是稳定的；当$a\ge(1+\mu)^2$时，两个实特征值是正的，因此定态是不稳定的；当

$(1-\mu)^2 < a < 1+\mu^2$ 时，两个复特征值的实部是负的，因此定态是稳定的；当 $1+\mu^2 < a < (1+\mu)^2$ 时，两个复特征值的实部是正的，因此定态是不稳定的．总之，当 $a < 1+\mu^2$ 时，定态是稳定的，而当 $a > 1+\mu^2$ 时，定态是不稳定的．这样，在定态的某个小邻域内系统的轨线性态是清楚的．

定理 6.1 和 6.2 说明非线性方程（6.10）或（6.13）零解是否稳定取决于其相应的特征方程（6.12）的全部根是否具有负实部．但当 n 是非常大时，代数方程（6.12）的根一般不能用公式表示．然而，我们并不需要找出特征方程的全部根，而只需要知道所有根的符号是否为负号．

下面的命题是一个非常实用的结果，它实际是判断代数方程的根是否均为负实部的一种有效方法，常称为赫尔维茨（Hurwitz）准则．

命题 6.1（赫尔维茨准则） 给定常系数 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{6.16}$$

其中 $a_0 > 0$，作行列式

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i = 0$（对一切 $i > n$），那么，代数方程（6.16）的一切根均是负实部的充分且必要条件是 Δ_1，Δ_2，$\cdots$，Δ_{n-1}，a_n 均为正的．

例 6.5 考虑 Lorenz 方程

$$\begin{cases} x' = a(y-x) \\ y' = cx - xz - y \\ z' = xy - bz \end{cases} \tag{6.17}$$

假定$a>0,b>0,c>1$．系统有三个定态$P_1(0,0,0)$和$P_{2,3}\left(\pm\sqrt{b(c-1)},\pm\sqrt{b(c-1)},c-1\right)$.

现在，利用赫尔维茨准则来判断定态P_1、P_2、P_3的稳定性.

先考虑P_1．相应的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

其雅可比矩阵的特征方程为

$\lambda^3+(a+b+1)\lambda^2+(a+b+ab-ac)\lambda-ab(c-1)=(\lambda+b)\left[\lambda^2+(a+1)\lambda-a(c-1)\right]=0$ 通过计算，获得

$$\Delta_1=1,\ \Delta_2=(a+b+1)(a+b+ab-ac)+ab(c-1),\ a_3=-ab(c-1)<0$$

由赫尔维茨准则知定态P_1总是不稳定的．事实上，特征方程的三个根分别为

$$\lambda_1=-b\ ,\quad \lambda_{2,3}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2+4a(c-1)}}{2}$$

其中$\lambda_2=\left[-(a+1)+\sqrt{(a+1)^2+4a(c-1)}\right]\Big/2>0$.

再考虑P_2和P_3．不难显示出，系统在P_2和P_3处的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & \pm\sqrt{b(c-1)} \\ \pm\sqrt{b(c-1)} & \pm\sqrt{b(c-1)} & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

其雅可比矩阵的特征方程具有相同的形式

$$\lambda^3+(a+b+1)\lambda^2+b(a+c)\lambda+2ab(c-1)=0$$

通过计算，我们获得

$$\Delta_1=1,\ \Delta_2=b(a+b+1)(a+c)-2ab(c-1),\ a_3=2ab(c-1)$$

因此,系统(6.17)的定态 P_2 或 P_3 是稳定的充要条件是 $(a+b+1)(a+c)>2a(c-1)$.

关于方程（6.1）的轨线在定态附近的行为，我们有下列更为深刻的两个结论[1].

命题 6.2（汇） 假设定态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 是汇，且 $\boldsymbol{J}=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ 的所有特征值的实部小于 $-\alpha$ （$\alpha>0$），则存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的一个邻域 $U\subset W$，使

（1）对所有的 $\boldsymbol{x}\in U$，轨线（或流）$\varphi_t(\boldsymbol{x})$，即系统（6.1）过 $\boldsymbol{x}$ 的积分曲线，对一切 $t>0$ 有定义，且在 U 内取值;

（2）存在常数 C，使得对所有的 $\boldsymbol{x}\in U$ 和 $t\geq 0$，有 $\|\varphi_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}^*\|\leq Ce^{-\alpha t}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|$.

特别是，当 $t\to+\infty$ 时，对所有的 $\boldsymbol{x}\in U$，有 $\varphi_t(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{x}^*$.

证 由假设，存在 $\beta>0$ 使得 $\boldsymbol{J}=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ 的一切特征值的实部 $\mathrm{Re}(\lambda)<-\beta<-\alpha$. 由代数学的知识可知，存在常数 $C>0$，使得对一切 $\boldsymbol{x}\in R^n$，有

$$\langle \boldsymbol{J}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\leq -bC\|\boldsymbol{x}\|$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积，$b>\beta$.

根据导算子的定义，对任意给定的小 ε 且 $0<\varepsilon<\beta-\alpha$，存在 $\delta_1>0$，使得

当$\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|<\delta_1$， $\boldsymbol{x}\in W$时就有

$$\left\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|<\varepsilon C\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|$$

由柯西（Cauchy）不等式知

$$\left\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\rangle\le\left\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right)\right\|\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|<\varepsilon C\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2$$

这样得到

$$\begin{aligned}\left\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\rangle&=\left\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\rangle+\left\langle\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\rangle\\&<\varepsilon C\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2-\beta C\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2=C(-\beta+\varepsilon)\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2\end{aligned}$$

因为$-\beta<-\alpha$， $\boldsymbol{x}^*\in W$， W是开集，所以存在$\delta_2>0$，使得当$\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|\le\delta_2$时就有$\boldsymbol{x}\in W$， 且

$$\left\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\rangle\le-C\alpha\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|^2$$

现在，取邻域$U=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n\,\middle|\,\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|<\delta_2\right\}$，则此邻域便满足定理的要求．事实上，令$\boldsymbol{x}(t)$（$0\le t\le t_0$）是$U$的轨线，且$\boldsymbol{x}(t)\ne\boldsymbol{x}^*$．由上述不等式可知：沿轨线有不等式

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{x}\|=\frac{\langle\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|}=\frac{\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|}\le-C\alpha\|\boldsymbol{x}\| \tag{6.19}$$

这说明当轨线到定态的距离$\left\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*\right\|$是随$t$增加而减少的．若$\boldsymbol{x}(0)\in U$，则$\boldsymbol{x}(t_0)\in U$．因为$U$的闭包$\bar{U}$是有界闭域，由解的延拓定理知，轨线$\boldsymbol{x}(t)$对一切$t\ge0$有定义．这就是该命题（1）的结果.

此外，从上述不等式（6.19），我们知道对一切$t\ge0$，有

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*\right\|\le Ce^{-\alpha t}\left\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}^*\right\|$$

这就是该命题（2）的结果. 命题得证. ■

这一定理刻画出系统的轨线在定态邻近的行为，即当定态是汇时，轨线在定态的邻域内以指数形式趋于此定态.

命题 6.3（源） 假设定态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*$ 是源，且 $\boldsymbol{J}=D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ 的所有特征值的实部大于正常数 α，则存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的某个领域 $U\subset W$ 和存在常数 C，使对所有的 $\boldsymbol{x}\in U$ 和 $t\geq 0$，有：$\left\|\varphi_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}^*\right\|\geq Ce^{\alpha t}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\right\|$. 特别是，对任意的 $\boldsymbol{x}\in U$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}^*$，轨线 $\varphi_t(\boldsymbol{x})$ 总在某个有限的时刻离开 U.

这个命题的证明类似于命题 6.2 的证明，从略.

习题 6.1

1. 试求出下列微分方程的所有定态，并分别讨论其稳定性：

（1）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(1-x-y)\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{4}y(2-3x-y)\end{cases}$；（2）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=9x-6y+4xy-5x^2\\ \dfrac{dy}{dt}=6x-6y-5xy+4y^2\end{cases}$；

（3）$\dfrac{d^2x}{dt^2}-\mu\dfrac{dx}{dt}+x+\mu x^2=0,\ (\mu>0)$；（4）$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-x\\ \dfrac{dy}{dt}=y-x^2-(x-y)\left(y^2-2xy+\dfrac{2}{3}x^3\right)\end{cases}$

2. 研究下列微分方程的零解的稳定性：

（1）$\dfrac{d^2x}{dt^3}+2\dfrac{dx}{dt}+3x=0$；

（2）$\dfrac{d^3x}{dt^3}+5\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+x=0$；

（3） $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mu x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = \mu z - x \end{cases}$ ，这里 μ 为系统的参数;

（4） $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y + z \end{cases}$

3. 对于 van der Pol（范德波尔）方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\left(x^2 - 1\right)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

其中 $\mu > 0$ 是常数，试讨论系统定态的稳定性.

5. 对于基因切换系统:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \alpha_0 + \dfrac{\alpha}{1+\upsilon^2} - u \\ \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{\beta}{1+u^2} - \upsilon \end{cases}$$

这里 $\alpha_0 > 0$ ，$\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$ 是系统参数，试在 (u,υ) 平面上画出零倾线，并讨论正定态的稳定性.

6. 根据定义证明：平面系统 $x' = -xy^6$ ，$y' = x^4y^2$ 的定态 $(0,0)$ 是稳定的.

§6.2　V 函数判定法

前一节给出了定态局部稳定性的判定定理，主要的依据是有关雅可比

矩阵的特征值实部的符号，有关条件是所有特征值的实部必须是非零（即相应的系统属于**双曲系统**类）．然而，常常出现这样的情形，系统的雅可比矩阵的特征值的实部为零（即属于**临界情形**），此时，前面的局部稳定性的分析方法无效．本节 V 函数判定法主要是处理这种情形，但相关应用非常广泛，远不止限于应用在判定平衡点的稳定性方面，例如，即可用于判断临界系统的稳定性，也可用于判断双曲系统的稳定性.

6.2.1 李雅谱诺夫定理

在陈述李雅谱诺夫定理之前，让我们先看两个例子，其中第一个例子用以说明局部稳定性分析无效，但系统可解，第二个例子用以说明在找不到系统的分析解的情况下，仍可以通过分析的办法得出系统定态的稳定性.

例 6.6 考虑非线性方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x\left(x^2 + y^2\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

显然，$\left(x^*, y^*\right) = (0,0)$ 是系统的一个定态，由上面的局部稳定性分析，我们无法判断这一定态的稳定性（因为线性化方程的雅可比矩阵的特征方程有一对纯虚根，请读者自己验证）.然而，假如我们构造函数 $V(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)/2$，这里假定 $x = x(t)$， $y = y(t)$ 是方程的解（或轨线）．现在，沿此轨线求它的全导数： $V' = xx' + yy' = -\left(x^2 + y^2\right)^2 = -4V^2$，于是通过从 t_0 到 t 积分（假定 $t \geq t_0$），得到

$$x^2(t)+y^2(t)=\frac{x^2(t_0)+y^2(t_0)}{1+4\left[x^2(t_0)+y^2(t_0)\right](t-t_0)}$$

这里t_0， $x(t_0)$和$y(t_0)$是三个预先给定的任意数，但满足$\left(x(t_0),y(t_0)\right)\neq(0,0)$，$t\geq t_0$（注：上式说明原方程是可解的）．显然，当$t\to+\infty$时，

$$\frac{x^2(t_0)+y^2(t_0)}{1+4\left[x^2(t_0)+y^2(t_0)\right](t-t_0)}\to 0$$

因此，当$t\to+\infty$时，$x^2(t)+y^2(t)\to 0$，蕴含着$x(t)\to 0$且$y(t)\to 0$．这说明定态$\left(x^*,y^*\right)=(0,0)$是稳定的.

例 6.7 考虑非线性方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x+xy\\ \dfrac{dy}{dt}=-y-x^2\end{cases}$$

除平凡解$x=0$和$y=0$外，此系统没有其它分析解．但通过分析，我们能够证明此方程的所有轨线均趋于平凡解．事实上，构造函数$V(x,y)=\left(x^2+y^2\right)/2$，这里假定$x=x(t)$， $y=y(t)$是微分方程的解．现求它在轨线上的全导数$V'=xx'+yy'=-2x^2-y^2\leq-2V$，于是通过从$t_0$到$t$积分，得到不等式$x^2(t)+y^2(t)\leq\left(x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)e^{-2(t-t_0)}$，这里$t_0$，$x(t_0),y(t_0)$是三个预先给定的任意数，$t\geq t_0$．显然，当$t\to+\infty$时，$\left(x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)e^{-2(t-t_0)}$趋于零，因此当$t\to+\infty$时，$x^2(t)+y^2(t)\to 0$或$x(t)\to 0$且$y(t)\to 0$.

这种通过构造 V 函数来显示出定态稳定性的办法称为**李亚谱诺夫（Lyapunov）方法**或**V 函数法**．V 函数法是判断定态稳定性的一种有效方

法，已得到广泛应用.

现在,我们来讨论如何应用 V 函数来确定非线性方程的定态的局部稳定性. 为方便起见，考虑下列非线性自治方程

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{6.20}$$

假定 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在区域 G：$\|\boldsymbol{x}\|\le\alpha$ 内具有连续的偏导数，因而方程（6.20）由初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 所确定的解在域 G 内存在且唯一. 显然 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是此系统的定态或一条轨线.

定义 6.2 假定 $V(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\|\boldsymbol{x}\|\le\beta$ 内的实连续函数，$V(\boldsymbol{0})=0$. 若在此域内恒有 $V(\boldsymbol{x})\ge 0$，则称函数 V 为**常正**的；若对一切 $\boldsymbol{x}\ne 0$ 都有 $V(\boldsymbol{x})>0$，则称 V 为**定正**的；若函数 $-V$ 是定正（或常正）的，则称 V 是**定负**（或**常负**）的.

例如，函数 $V(x,y)=x^2+y^2$ 是定正的，而函数 $V(x,y)=(x+y)^2$ 是常正的但不是定正的.

进一步，假设函数 $V(\boldsymbol{x})$ 关于所有变元的偏导数存在且连续，则以方程（6.20）的解代入后对 t 求导数得

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i$$

这样求得的导数 $\frac{dV}{dt}$ 称为函数 $V(\boldsymbol{x})$ 关于（或通过）方程（6.20）的**全导数**.

现在，我们来叙述常微分方程定性理论中的一个重要定理.

定理 6.3（李亚谱诺夫稳定性定理） 对微分方程（6.20)，如果能找到一个定正的函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得

(1) 其全导数 dV/dt 为常负或恒等于零，则零解是稳定的；

(2) 若 dV/dt 定负，则零解是渐近稳定的；

此外，

(3) 若存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 和某个非负常数 μ，且通过方程（6.20）的全导数可表示为

$$\frac{dV}{dt} = \mu V + W(\boldsymbol{x})$$

且当 $\mu = 0$ 时，W 为定正函数，而当 $\mu > 0$ 时 W 为定正函数或恒等于零，则零解是不稳定的.

证* 不妨设定理中出现的定号或恒号函数均在域 $\|\boldsymbol{x}\| \le \beta$ 上有定义. 下面分三部分来证明此定理.

稳定性 任给正数 $\varepsilon < \beta$，由 $V(\boldsymbol{x})$ 的连续性和定正性知，必存在 $\ell = \inf\limits_{\varepsilon \le \|\boldsymbol{x}\| \le \beta} V(\boldsymbol{x}) > 0$. 又由 $V(\boldsymbol{0}) = 0$ 和 $V(\boldsymbol{x})$ 的连续性推知,存在充分小的 $\delta < \varepsilon$ 使得当 $\|\boldsymbol{x}\| \le \delta$ 时有 $V(\boldsymbol{x}) < \ell$.

现在证明, 对这样的 δ，当 $\|\boldsymbol{x}_0\| \le \delta$ 时, 则以 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 为初始向量的解 $\boldsymbol{x}(t)$，对一切 $t \ge t_0$ 满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \tag{6.21}$$

事实上，由于 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 和 $\|\boldsymbol{x}_0\| \le \delta < \varepsilon$ 以及由解 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 t 的连续性知，不等式（6.21）至少对某个有限区间 $t_0 \le t < T$ 成立. 又由 $\varepsilon < \beta$ 及定理的条件知

$$\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt} \le 0 \text{ 或} \equiv 0$$

积分之得

$$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)-V\left(\boldsymbol{x}_0\right)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV\left(\boldsymbol{x}(s)\right)}{ds}ds\le 0\text{或}\equiv 0$$

因此，当$t_0\le t<T$时有

$$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)\le V\left(\boldsymbol{x}_0\right)<\ell \tag{6.22}$$

这就证明了：若解满足不等式（6.21），则不等式（6.22）成立.

假如不等式（6.21）不是对所有的$t\ge t_0$成立，则当t从t_0逐渐增大时必存在某个t^*，使得当$t_0\le t<t^*$时不等式（6.21）成立，但当$t=t^*$时有$\left\|\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right\|=\varepsilon$. 由于$\varepsilon<\beta$，因此不等式（6.22）在$t=t^*$时仍然成立，即$V\left(\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right)<\ell$. 然而，由$\ell$的定义，显然$\left\|\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right\|<\varepsilon$（否则的话，由$\left\|\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right\|\ge\varepsilon$可推得$V\left(\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right)\ge\ell$），这与假设$\left\|\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right\|=\varepsilon$相矛盾. 故不等式（6.21）对一切$t\ge t_0$均成立，即原方程的零解是稳定的.

渐近稳定性 根据上面的证明知，当dV/dt定负时，零解是稳定的，因此对上面同样的δ，当$\left\|\boldsymbol{x}_0\right\|\le\delta$时，对一切$t\ge t_0$有$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|<\beta$. 为了证明$\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|=$ ，先证明

$$\lim_{t\to+\infty}V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)=0$$

注意到，由于dV/dt是定负的，因此函数$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$关于$t$是递减的，故极限

$$\lim_{t\to+\infty}V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)=c$$

存在. 若$c\ne 0$，则对一切$t\ge t_0$有$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)>c$. 又因$V\left(\boldsymbol{x}\right)$连续、定正和$V\left(\boldsymbol{0}\right)=0$，

故存在$\lambda>0$使得对一切$t\ge t_0$有$\|\boldsymbol{x}(t)\|>\lambda$．现在取$m=\sup\limits_{\lambda\le\|\boldsymbol{x}\|\le\beta}\dfrac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}$，则由$\dfrac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}$的定负性知$m<0$．于是

$$V(\boldsymbol{x}(t))-V(\boldsymbol{x}_0)=\int_{t_0}^{t}\frac{dV(\boldsymbol{x}(s))}{ds}ds\le m(t-t_0)$$

这说明，当t不断增大时，可使$V(\boldsymbol{x}(t))$变为负的，与$V(\boldsymbol{x})$的定正性相矛盾．因此，$c=0$.现在证明：由$\lim\limits_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$可推出$\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$（这是李亚谱诺夫函数的重要蕴含）．采用反证法，若不成立，则由零解是稳定的，知解$\boldsymbol{x}(t)$是有界的．因此，存在序列$\{t_k\}$，$t_k\to+\infty$（当$k\to\infty$时），使

$$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t_k)\|=\|\boldsymbol{x}^*\|\ne0$$

根据$V(\boldsymbol{x})$的定正性和连续性，有

$$\lim_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t_k))=V(\boldsymbol{x}^*)\ne0$$

这与$\lim\limits_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$相矛盾．至此，我们已证明了零解是渐近稳定的.

不稳定性 由定理的条件，知不管$\delta<\beta$怎么小，总存在$\boldsymbol{x}_0$使得$\|\boldsymbol{x}_0\|\le\delta$且$V(\boldsymbol{x}_0)>0$.现在，我们证明以$\boldsymbol{x}_0$为初始向量的解$\boldsymbol{x}(t)$必定走出区域$\|\boldsymbol{x}\|\le\beta$之外.若不然，则

$$\text{对一切}\,t\ge t_0\text{，有}\,\|\boldsymbol{x}(t)\|\le\beta$$

注意到$dV(\boldsymbol{x})/dt$的表达式和对W的假设，当$\mu>0$时有

$$\frac{dV}{dt}-\mu V\ge0\text{ 或}\equiv0$$

由此可得

$$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) \geq V\left(\boldsymbol{x}_0\right) e^{\mu(t-t_0)} \geq V\left(\boldsymbol{x}_0\right) > 0$$

因此，只要取t足够大，则$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$可任意大.

而当$\mu = 0$时，由W的定正性有

$$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) - V\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV\left(\boldsymbol{x}(s)\right)}{ds} ds \geq 0$$

同样得到$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) \geq V\left(\boldsymbol{x}_0\right) > 0$．又因$V(\boldsymbol{x})$连续、定正和$V(\boldsymbol{0}) = 0$，故存在$\lambda > 0$使得对一切$t \geq t_0$有$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| > \lambda$．由于$W(\boldsymbol{x})$是定正函数，于是存在正数$m = \inf\limits_{\lambda \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq \beta} W(\boldsymbol{x})$. 这样一来，便有

$$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) - V\left(\boldsymbol{x}_0\right) = \int_{t_0}^{t} W\left(\boldsymbol{x}(s)\right) ds \geq m\left(t - t_0\right)$$

同样表明，只要t足够大，就有$V\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$任意大.

总之，两种情况均与$V(\boldsymbol{x})$在区域$\|\boldsymbol{x}\| \leq \beta$连续，从而与有界相矛盾. 因此，必定存在某个$t^* > t_0$使得$\left\|\boldsymbol{x}\left(t^*\right)\right\| > \beta$，故零解是不稳定的. 定理证毕. ■

下一步，以平面微分方程组为例来说明李雅谱诺夫定理的几何意义. 第一章已经指出，由未知函数组成的空间称为相空间（二维相空间又称为相平面)，微分方程的解在相空间中的轨迹称为轨线，它是积分曲线在相空间中的投影. 由解的存在唯一性定理知，**相空间中的任何两条轨线是不相交的**,这是轨线的一条重要性质. 现在,我们作积分曲线族$V(\boldsymbol{x}) = c$（这里$c > 0$). 不同的c导致不同的积分曲线. 假定$V(\boldsymbol{x})$为定正的函数，即$V(\boldsymbol{0}) = 0$，而当$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$时，$V(\boldsymbol{x}) > 0$，且$V(\boldsymbol{x})$是连续的，这时当$c$充分小时，曲线族$V(\boldsymbol{x}) = c$是闭的，并且当$c_1 < c_2$时闭曲线$V(\boldsymbol{x}) = c_1$完全包含在闭曲线$V(\boldsymbol{x}) = c_2$内，如图 4.8

的左图所示.

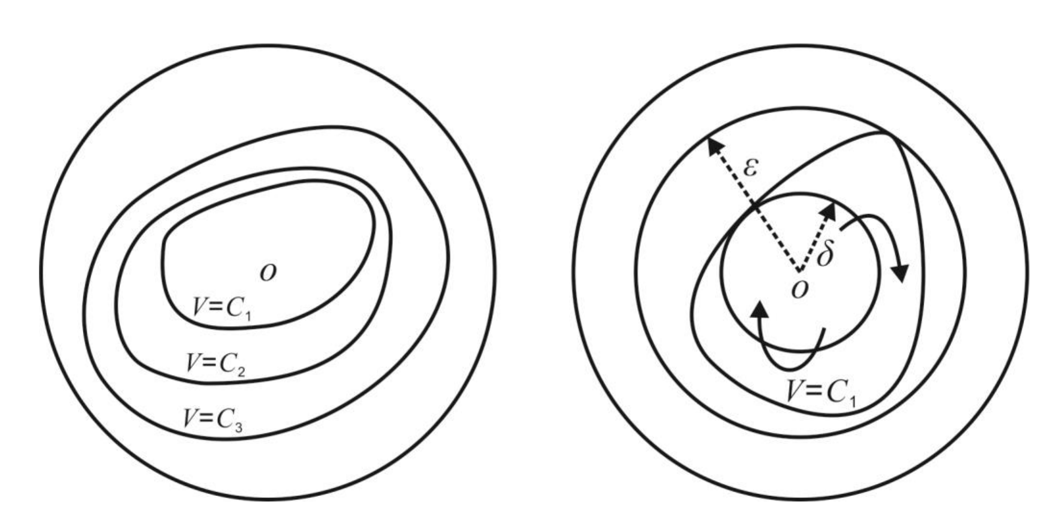


图 6.8 李雅谱诺夫定理的几何解释

左图：$V=c$的闭曲线族（$c_1<c_2<c_3$）；右图：稳定性态与V函数之间的关系.

若沿着轨线$\boldsymbol{x}(t)$有$dV/dt\le 0$，这意味着函数$V(\boldsymbol{x}(t))$对一切$t\ge t_0$是t的不增函数. 因此，轨线$\boldsymbol{x}(t)$将随着t的增加而一层层地进入闭曲线族$V(\boldsymbol{x})=c$或沿着这些曲线运动，始终不会由$V(\boldsymbol{x})=c$确定的任一闭曲线的内部走到其外部去.

这样一来，对任意给定的正数$\varepsilon<\beta$，在域$\|\boldsymbol{x}\|\le\varepsilon$内作最大闭曲线$V(\boldsymbol{x})=c$，并在这条闭曲线内作以原点为中心的最大内接圆，其半径为δ，如图 6.8 的右图. 则由域$\|\boldsymbol{x}\|\le\delta$内任何一点$\boldsymbol{x}_0$出发的轨线始终要停留在$V=c$之内，自然更停留在域$\|\boldsymbol{x}\|\le\varepsilon$之内，即$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$，所以零解是稳定的.

当dV/dt定负时，则允许轨线$\boldsymbol{x}(t)$自外向内穿越曲线族$V(\boldsymbol{x})=c$，且渐近地趋于原点，不允许轨线在$V(\boldsymbol{x})=c$上盘旋，此时零解是渐近稳定的.

不稳定的情形可类似地讨论，这时轨线将自内向外离开曲线族$V(\boldsymbol{x})=c$，并走出域$\|\boldsymbol{x}\|\le\beta$之外.

例 6.8 考虑平面微分方程

$$\frac{dx}{dt}=-y+ax^3,\quad \frac{dy}{dt}=x+ay^3$$

其线性方程组的特征值为$\lambda=\pm\sqrt{-1}$，属于临界情形. 如取定正函数$V=\left(x^2+y^2\right)/2$，这时$dV/dt=a\left(x^4+y^4\right)$. 由定理 6.3，依$a$的不同情况可得下来结论:

（1）若$a<0$，则dV/dt定负，因此零解是渐近稳定的;

（2）若$a>0$，则dV/dt定正，因此零解是不稳定的;

（3）若$a=0$，则$dV/dt\equiv0$，因此零解是稳定的.

例 6.9 给定三维 ODE 系统:

$$\begin{cases}x'=-ax-2y+yz\\ y'=2x-by+2xz-5x^2y\\ z'=-cz-6xy\end{cases}$$

其中$a>0$，$b>0$，$c>0$是参数. 试通过构造李亚谱诺夫函数证明原点是该系统渐近稳定的平衡态.

证 显然$(0,0,0)$是此系统的平衡态. 现构造李亚谱诺夫函数:

$$V=\frac{1}{2}(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2)$$

易验证它是正定的，其全导数为

$$\frac{dV}{dt}=xx'+yy'+\frac{1}{2}zz'=-ax^2-by^2-\frac{1}{2}cz^2-5x^2y^2\le0$$

又当$(x,y,z)\neq 0$时，$dV/dt<0$，故原点是此系统渐近稳定的平衡态.

李亚谱诺夫稳定性定理经过不断发展，可以在更广泛的条件下得到关于稳定性、渐近稳定性和不稳定性的结论. 下面仅举一个扩充形式的李雅谱诺夫稳定性定理为例.

定理 6.4（**李亚谱诺夫稳定性定理的扩充版本**）假设存在定正函数$V(\boldsymbol{x})$，其通过方程（6.20）的全导数$dV(\boldsymbol{x})/dt$为常负，但使$dV(\boldsymbol{x})/dt=0$的点$\boldsymbol{x}$集中在除$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$之外并不包含方程（6.20）的整条正半轨线，则方程（6.20）的零解是渐近稳定的.

定理 6.4 的证明与定理 6.3 的证明基本类似，因此我们这里省略详细的证明过程，但指出某些关键步骤. 由于定理条件，对轨线$\boldsymbol{x}(t)$不会恒有$dV(\boldsymbol{x}(t))/dt\equiv 0$，故仍可通过反证法证明$\lim_{t\to+\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0$，由此推知$\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{x}(t)\|=0$. 从几何上来看，虽然$dV(\boldsymbol{x})/dt$常负，但因使$dV(\boldsymbol{x})/dt=0$的集合除零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$外不包含整条正半轨线，因此轨线不会永远停留在某一闭曲线$V=c$上，必然会自外向内逐渐进入曲线族并最终趋于零解.

6.2.2 二次型 V 函数的构造

为了应用李雅谱诺夫稳定性定理，关键是能否找到合适的V函数. 如何构造满足定理要求的V函数是一个有趣而复杂的问题. 这里，仅考虑常系数微分方程组，如何构造二次型V函数的问题，主要结果包含在下列定理中.

定理 6.5 假设一阶线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{dt}}=\boldsymbol{Ax} \tag{6.23}$$

的特征值λ_i均满足关系$\lambda_i+\lambda_j\neq 0$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则对任何负定（或正定）的对称矩阵$\boldsymbol{C}$，均存在唯一的二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Bx} \quad (\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}) \tag{6.24}$$

使其通过方程组（6.20）的全导数为

$$\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Cx} \tag{6.25}$$

且对称矩阵$\boldsymbol{B}$满足关系式

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{C} \tag{6.26}$$

进一步，如果方程组（6.23）的特征值均具有负实部，则二次型（6.24）是正定（或负定）的；如果特征值均具有正实部，则二次型不是常正（或常负）的.

这一定理的证明主要是应用线性代数的知识，这里不给出详细的证明过程（有兴趣的读者可参考[2]），但仅给出证明思路．首先，说明三个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$的确满足关系式（6.26）．事实上，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d\boldsymbol{x}^T}{dt}B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}=\boldsymbol{x}^T\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{BA}\right)\boldsymbol{x}$$

再结合（6.25）即得（6.26）．其次，在关系式（6.26）中，矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是已知的，因此矩阵$\boldsymbol{C}$可通过求解矩阵代数方程来得到．最后，用反证法来证明定理的后半部分结论.

例 6.10 二阶线性微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=0$$

经过变换 $dx/dt=y$ 变为平面系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y\end{cases}$$

其特征值为 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=-2$，显然满足定理 6.5 的条件. 注意到：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}$.

现在，给定对称负定矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，则可通过关系式（6.26）来确定二次型

$$V(x,y)=[x,y]\begin{bmatrix}b_1&b_3\\b_3&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

事实上，将矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1&b_3\\b_3&b_2\end{bmatrix}$ 代人（6.26）得

$$\begin{cases}-4b_3=-1\\ b_1-2b_2-3b_3=0\\ 2b_3-6b_2=-1\end{cases}$$

解之得

$$b_1=\frac{5}{4},\ b_2=\frac{1}{4},\ b_3=\frac{1}{4}$$

这样一来，我们得到二次型

$$V(x,y)=\frac{1}{4}\left(5x^2+2xy+y^2\right)$$

不难验证，此二次型是正定的，而且其通过方程组的全导数为

$$\frac{dV(x,y)}{dt}=-(x^2+y^2)=[x,y]\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

这与定理 6.5 的结论相符．此外，可知系统的零解是渐近稳定的.

下面，我们应用V函数的性质来证明局部稳定性定理（即定理 6.2）．事实上，假定非线性方程（6.20）的线性化方程（6.23）的特征值λ_i满足$\lambda_i+\lambda_j\neq 0$（$i,j=1,2,\cdots,n$），则取可$\boldsymbol{C}$为负单位矩阵，即取$\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{E}$．根据定理 6.5，存在二次型

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B})\tag{6.27}$$

其通过线性方程（6.13）的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{x}^T\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T(-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

而二次型（6.27）通过非线性方程（6.20）的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right)=-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}).$$

又$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$且$\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|/\|\boldsymbol{x}\|^2=0$，因此只要取原点$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的足够小的邻域便可使在此域内有

$$\left|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right|<\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

这时

$$\frac{dV}{dt}<-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$$

即二次型（6.27）通过非线性方程（6.20）的全导数是定负的.

因此，当方程（6.20）的线性化方程的特征值均具有负实部时，显然有

$\lambda_i+\lambda_j\neq 0$，而且由定理 6.5 知二次型（6.27）是正定的．此外，$\frac{dV}{dt}$定负，故根据李雅谱诺夫稳定性定理，非线性方程（6.20）的零解是渐近稳定的.

当非线性方程（6.20）的线性化方程（6.23）具有正实部特征值时，我们考虑方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}$$

这里$\boldsymbol{E}$是单位矩阵，μ为正常数．显然，矩阵$\boldsymbol{A}-(\mu/2)\boldsymbol{E}$的特征值等于$\lambda-(\mu/2)$（$\lambda$为$\boldsymbol{A}$的特征值）．因此，只要$\mu$取得足够小，便可使上述方程仍有正实部的特征值，且任意两个特征值之和均不等于零．于是，由定理 6.5，对于单位矩阵$\boldsymbol{E}$（正定矩阵），存在不是常负的对称矩阵$\boldsymbol{B}$，它满足关系式（6.26），即

$$\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}-\frac{\mu}{2}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}\text{ 或 }\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$$

这样一来，二次型（6.27）通过非线性方程（6.20）的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\right)=\mu V+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

在原点$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$足够小的邻域内，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$可取得使

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$$

仍为定正的．而二次型（6.27）不是常负的，即在$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的任意小的邻域内均存在$\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$使$V(\boldsymbol{x}_0)>0$．因此，满足定理 6.5 关于不稳定性的条件，故方程（6.20）的零解是不稳定的.至此，定理证毕．■

习题 6.2

1. 试构造形如$V(x,y)=ax^2+by^2$的 V 函数来确定下来微分方程的零解的稳定性:

（1） $\frac{dx}{dt}=-4x+xy^2$， $\frac{dy}{dt}=-2yx^2-3y^3$；

（2） $\frac{dx}{dt}=-x+xy^2$， $\frac{dy}{dt}=-2yx^2$；

（3） $\frac{dx}{dt}=-x+\alpha y^3$， $\frac{dy}{dt}=-2xy^2$， 其中$\alpha>0$是一个参数;

（4） $\frac{dx}{dt}=3x^3-2y^3$， $\frac{dy}{dt}=xy^2+x^2y+\frac{1}{5}y^3$

2. 给定微分方程组:

$$x'=y-xf(x,y)，\quad y'=-x-yf(x,y)$$

其中$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数. 试证明: 在原点的某邻域内, 若$f>0$则零解是渐近稳定的；若$f<0$则零解是不稳定的.

3. 研究下列微分方程组的零解的稳定性:

（1） $\begin{cases} x'=y-xy^2-y^2 \\ y'=-2x+2xy-y^3 \end{cases}$；

（2） $\begin{cases} x'=-x-2y+(x-y)(x^2+y^2) \\ y'=2x-y+(x+y)(x^2+y^2) \end{cases}$；

（3） $\begin{cases} x'=-xy^4 \\ y'=x^4y \end{cases}$；

（4） $x'=ax-xy^2, y'=2x^4y$， 其中a为参数;

（5） $\begin{cases} x' = a(y-x) \\ y' = cx - xz - y \\ z' = -bz + xy \end{cases}$，其中 $a>0$， $b>0$， $0<c<1$是参数.

4. 给定二阶方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

其中 $f(0)=0$，而当 $x \neq 0$时 $xf(x)>0$ （$-k<x<k$）. 试讨论零解的稳定性.

（**提示:** 先转化为平面系统，然后构造 V 函数）

5. 试将下列高阶线性方程转化成方程组， 然后对方程组构造形如 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$的 V 函数，并判定方程组定态的稳定性:

（1） $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$；

（2） $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 6\dfrac{d^2x}{dt^2} + 11\dfrac{dx}{dt} - 6x = 0$

6. 方程组

$$x' = 2y - x^3, \quad y' = -4\left(x^3 + y^5\right)$$

能否由线性近似方程来决定其零解的稳定性? 试寻求 V 函数并讨论零解的稳定性.

7. 对于方程组:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x - \alpha x^2 - \gamma xy^2 - \beta y^3 \end{cases}$$

试构造形如$V(x,y) = x^2 + y^2 + F_3(x,y) + F_4(x,y)$的函数（这里$F_3$和$F_4$分别是 x

和 y

的三次和四次齐次函数)，讨论零解的局部稳定性.

（**提示:** 先求全导数, 然后分别令三次和五次齐次式为零, 并解出 F_3 和 F_4）

§6.3　极限环及其稳定性

一个微分方程系统除存在定态外，还可能存在周期轨，其中极限环就是特别一类周期轨．极限环也是一大类动力系统的特殊轨道，相应的微分方程系统能够在物理、化学、生物等许多领域找到．本节主要介绍极限存在性的判别定理和极限环稳定性的有关定性结果.

例 6.11 考虑平面一阶非线性方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{cases} \tag{6.28}$$

不难看出, $(x, y) = (0,0)$ 是系统(6.28)的唯一定态. 引进极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ （非奇异变换），则此方程变成（或等价于）

$$\begin{cases} r' = r\left(1 - r^2\right) \\ \theta' = 1 \end{cases} \tag{6.29}$$

方程（4.29）除特解 $r = 0$ （它对应于系统的定态）外，还有一个特解

$$r = 1\,,\quad \theta = t - t_0$$

或

$$x = \cos\left(t - t_0\right)\,,\quad y = \sin\left(t - t_0\right)$$

它表示中心在原点的单位圆，显然是周期的，且周期为2π，轨线的走向是逆时针方向的.

现在，我们来看：除了上面两个特解外，其它轨线的性态如何呢？在相平面上任意作一个中心在原点半径为$R>0$的圆，考虑通过$r=R$圆上的任一点(R,θ_1)沿轨线的走向.

当$R=R_1<1$时，由（6.29）知

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=R_1}=R_1\left(1-R_1^2\right)>0\ ,\quad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\theta_1}=1>0$$

即轨线按逆时针方向从$r=R_1$上走出圆外. 参考图 6.9.

当$R=R_2>1$时，由（6.29）知

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=R_2}=R_2\left(1-R_2^2\right)<0\ ,\quad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\theta_1}=1>0$$

即轨线按逆时针方向从$r=R_2$上走进圆内. 参考图 6.9.

考虑环域D：$R_1<r<R_2$. 首先，此环域不包含系统（6.29）或系统（6.28）的定态. 其次，在边界$r=R_1$和$r=R_2$上的所有轨线均从环域D外进入D内，并不走出环域D，参考图 6.9.

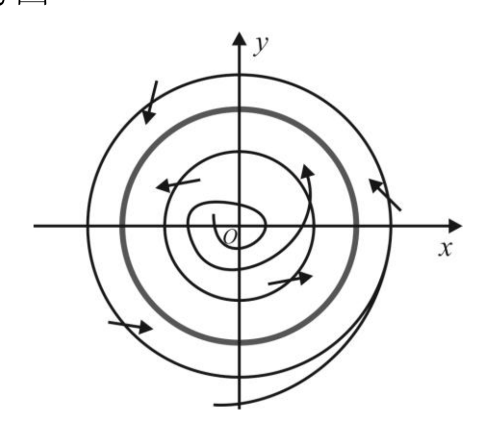


图 6.9 极限环与环域.

如果R_1和R_2足够接近于 1，但仍保持$R_1<1<R_2$，则环域D的上述性质仍不变．这就证明了$r=1$是系统（6.29）一个稳定的周期轨线，即其它所有的轨线均趋于此周期轨.

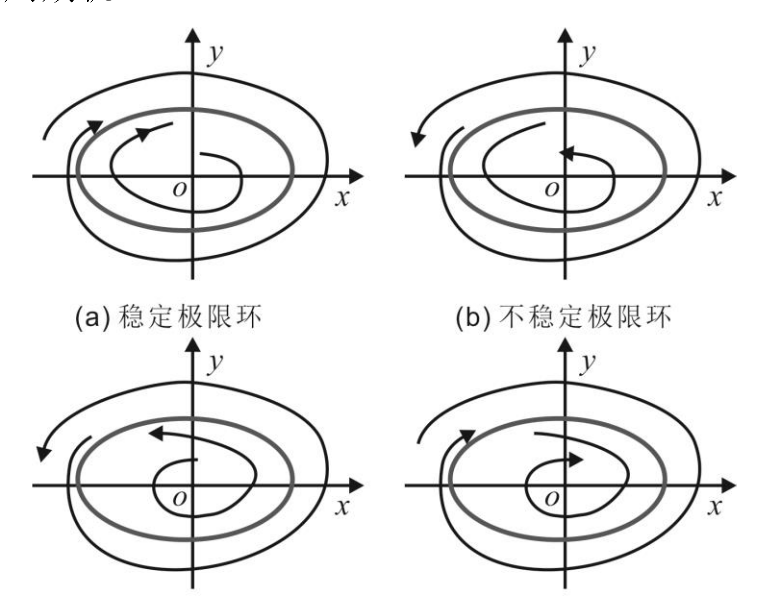


图 6.10 极限环的稳定性态.

本节的内容主要包括极限的存在性和稳定性，我们将给出若干定理判断一个系统的极限环的存在性和稳定性.

极限环是指一个微分方程系统存在孤立的闭轨．若极限环附近的所有轨线均正向（即$t\to+\infty$）趋于它，则称此极限环是**稳定的**；若极限环附近的某些轨线是负向（即$t\to-\infty$）趋于它，则称此极限环是**不稳定的**；若极限环附近的一侧轨线均正向（即$t\to+\infty$）趋于它，而另一侧轨线负向趋于它，则称此极限环是**半（或单侧）稳定的**．参考图 6.10.

上面例 6.11 的分析表明，该系统的极限环是稳定的.

6.3.1 极限环的存在性判断定理

为简单起见，我们仅考虑平面微分方程系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{6.30}$$

其中右端函数P和Q在平面上的某个区域G内具有一阶连续偏导数.

先给出判断闭轨（包括极限环）不存在的两个方法，即下面的两个定理.

定理 6.6 （Bendixson 判断）若在单连通区域D内函数$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}$不变号，则系统（6.30）在$D$内无闭轨.

证 采用反证法. 假设系统（6.30）在D内有一条闭轨Γ（它的内部区域记为Ω. 显然，$\Omega \subset D$），由格林（Green）公式有

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{\Gamma} Pdy - Qdx$$

因Γ是系统（6.30）的轨线，所以上式右端积分曲线的被积函数为

$$Pdy - Qdx = (PQ - QP)dt \equiv 0$$

从而积分曲线为零. 而由定理假设知，左端重积分不为零，这就产生了矛盾. 定理证毕. ■

定理 6.7 （Dulac 判断）如果存在具有连续偏导数的函数$H(x,y) \neq 0$，使

得在单连通区域D内函数$\dfrac{\partial(HP)}{\partial x}+\dfrac{\partial(HQ)}{\partial y}$不变号，则系统（6.30）在$D$内无闭轨.

这一定理的证明完全类似于定理 6.6 的证明（请读者自己证明）.

例 6.12 考虑系统

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2 \end{cases}$$

此时，$P(x,y)=y$，$Q(x,y)=-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2$．该系统有两个平衡点$(0,0)$和$(a/\alpha,0)$.

因为

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-b+2\beta y$$

所以，由 Bendixson 判断知，当$y>b/(2\beta)$与$y<b/(2\beta)$时，这两个半平面内都没有闭轨，但不能排除有与直线$y=b/(2\beta)$相交的闭轨.

现在，考虑以下形式的$H(x,y)$

$$H(x,y)=e^{mx+ny}$$

其中，m和n是常数但待定.

因为

$$\frac{\partial(HP)}{\partial x}+\frac{\partial(HQ)}{\partial y}=e^{mx+ny}\left[-b-anx-(bn-m-2\beta)y+\alpha nx^2+\beta ny^2\right]$$

所以，假如取$n=0$，$m=-2\beta$，则上式右端括号内x项与y项的系数为零．此

时，我们有 $H(x,y)=e^{-2\beta x}$，而 $\frac{\partial(HP)}{\partial x}+\frac{\partial(HQ)}{\partial y}=-be^{-2\beta x}$ 在全平面上不变号（只要 $b\neq 0$）。于是，此系统在全平面上无闭轨.

其次，我们不加证明地给出闭轨存在的充分条件（有兴趣的读者，可参考书[1]），但用例子加以解释.

定理 6.8 若系统（6.30）的轨线在某个环形区域 D 的边界上总是自外向内的，且在 D 的内部无平衡点，那么系统（6.30）在 D 内至少存在一个稳定的极限环.

定理 6.9 若系统（6.30）的轨线在某个区域 D 的边界上总是自外向内的，且在 D 内除去不稳定焦点或结点外无其它平衡点，那么系统（6.30）在 D 内至少存在一个稳定的极限环.

在应用这两个定理时，关键是如何找到满足定理条件的区域 D.

下面，给出一个例子来说明定理的应用.

例 6.13 在区域 G： $G=\{(x,y)\in R^2\mid(x>0,y>0)\}$（即第一像限）中，考虑俄勒冈振子（Oregonator）:

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{dx}{dt}=x(1-x)-fy\dfrac{x-\mu}{x+\mu}\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$$

其中参数满足条件： $0<\mu<1$， $0<\varepsilon<1$， $0<f<+\infty$.

不难看出，此系统在 G 内有唯一的定态，若记为 $S_+=(x_+(\mu,f),y_+(\mu,f))$，

则

$$x_+(\mu, f) = y_+(\mu, f) = \frac{1 - f - \mu + \sqrt{(1 - f - \mu)^2 + 4\mu f}}{2}$$

注意到

$$\frac{\partial x_+(\mu, f)}{\partial f} = \frac{1}{2}\left[-1 + \frac{f + 3\mu - 1}{\sqrt{(f + 3\mu - 1)^2 + 8\mu(1-\mu)}}\right] < 0$$

且 $x_+(\mu,0) = 1$， $\lim\limits_{f \to +\infty} x_+(\mu, f) = \mu$， 因此， $\mu < x_+(\mu, f), y_+(\mu, f) < 1$.

现将系统在此定态附近作线性化方程，得到雅可比矩阵 $A = A(S_+) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，其中， $a_1 = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - 2x_+ - \frac{2\mu f x_+}{(x_+ + \mu)^2}\right]$， $b_1 = -\frac{f}{\varepsilon}\left(\frac{x_+ - \mu}{x_+ + \mu}\right)$. 此矩阵的特征值为 $\lambda_\pm = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$，其中 $p = 1 - a_1$， $q = -(a_1 + b_1)$， $\Delta = p^2 - 4q$. 注意到

$$q = -(a_1 + b_1) = \frac{x_+}{\varepsilon}\left[1 + \frac{2\mu f}{(x_+ + \mu)^2}\right] > 0$$

因此，我们有下列结论：

若 $p < 0$ 或 $a_1 > 1$，则正定态是不稳定的，且是不稳定的结点或焦点；

若 $p > 0$ 或 $a_1 < 1$，则定态是稳定的；

若 $p = 0$ 或 $a_1 = 1$，则定态的稳定性不能由线性化方程确定，需要进一步的讨论.

下面，我们仅考虑定态是不稳定的情形，即 $a_1 > 1$. 此时，我们构造定理 4.9 中的区域 D 如下，它由四条直线： $x = \mu$， $x = 1$， $y = \mu$， $y = 1$ 围成.

我们用向量$\boldsymbol{\upsilon}=\left[\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right]$表示轨线在向量场中的方向，并用$\boldsymbol{n}$表示区域$D$的单位外法向量．现在，考虑系统的轨线在此区域$D$的边界上的走向.

在边界直线$x=\mu$上，我们有$\boldsymbol{n}=[-1,0]$，$\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\varepsilon}\mu(1-\mu)<0$（这里点表示内积.下同），因此，系统的轨线是由$D$外进入$D$内的；

在边界直线$x=1$上，我们有$\boldsymbol{n}=(1,0)$，$\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\varepsilon}fy\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)<0$，因此，系统的轨线是由$D$外进入$D$内的；

在边界直线$y=\mu$上，我们有$\boldsymbol{n}=(0,-1)$，$\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}=-(x-\mu)<0$，因此，系统的轨线是由$D$外进入$D$内的；

在边界直线$y=1$上，我们有$\boldsymbol{n}=(0,1)$，$\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{n}=-(1-x)<0$，因此，系统的轨线是由$D$外进入$D$内的.

而且，定态S_+完全位于D内，因此，根据上面的定理 6.9，我们知道当$a_1>1$时，该系统至少有一个极限环存在.

下一步，陈述系统（6.30）的极限环的稳定性结果.

定理 6.10（极限环的稳定性指标） 若Γ是系统（6.30）的极限环，描述它的运动方程为：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$均为周期为T的函数，则**极限环指标**（或称为**特征指标**）：$\gamma=\frac{1}{T}\int_0^T\left[P'_x(\varphi,\psi)+Q'_y(\varphi,\psi)\right]dt$决定此极限环的稳定性，更确切地，若$\gamma<0$，则$\Gamma$稳定；若$\gamma>0$，$\Gamma$不稳定；若$\gamma=0$，则$\Gamma$是重极限环（即不是简单极限环），它的稳定性需进一步判断.

这一定理的证明被省略了（参考书[1]），但这里给出例子来说明之.

例 6.14 考虑下列系统：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x\left(1-x^2-y^2\right)\\\dfrac{dy}{dt}=x+y\left(1-x^2-y^2\right)\end{cases}$$

由例 8 知它有周期解： $x=\cos\left(t-t_0\right)$， $y=\sin\left(t-t_0\right)$，且周期$T=2\pi$. 现在，我们计算该极限环的指标. 由于 $P_x'(x,y)+Q_y'(x,y)=2-4\left(x^2+y^2\right)=-2$， 因此 $\gamma=-2<0$，说明此极限环是稳定的，这与前面的结果一致.

下一步，考虑一个更难的例子（读者可选择学习）.

例 6.15 考虑李安娜（Lienard）方程*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f\left(x\right)\frac{dx}{dt}+g\left(x\right)=0 \tag{6.31}$$

的闭轨的稳定性. 相应问题可转化成方程组

$$\begin{cases}x'=y\\y'=-g\left(x\right)-f\left(x\right)y\end{cases} \tag{6.32}$$

的闭轨（或极限环）的稳定性.

关于此系统极限环的存在性，请参考书[1]. 现设Γ是系统（6.32）的闭轨（其周期为T），γ_0是Γ的指标，计算得

$$\gamma_0=\frac{1}{T}\int_0^T\left[P_x'+Q_y'\right]dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[-f\left(x\right)\right]dt$$

根据定理 6.10，由γ_0的符号可以判断Γ的稳定性. 为求γ_0的符号，我们分以

下三步.

第一步，引入下列能量函数

$$E(x,y)=\frac{y^2}{2}+G(x)，其中 G(x)=\int_0^x g(s)ds \tag{6.33}$$

并证明：在系统（6.32）的闭轨Γ上，当E取极值时，阻尼$f(x)$为零，而速度$y=x'\neq 0$.

事实上，E沿着Γ取极值的必要条件是

$$E'|_\Gamma = yy'+g(x)x'=-f(x)y^2=0 \tag{6.34}$$

设在$t=t_0$时刻$E|_\Gamma$达到极值，则必有$f(x(t_0))=0$或$y(t_0)=x'(t_0)=0$．若后一种情形发生，即$x'(t_0)=0$，则$x''(t_0)\neq 0$，这是因为否则的话，根据解的唯一性，$x\equiv x(t_0)$是方程（6.31）的解，这与Γ是闭轨相矛盾．既然$x'(t_0)=0$而$x''(t_0)\neq 0$，因此$x(t)$在$t=t_0$处取到极值，即$x(t)$在$t=t_0$附近恒大于或恒小于$x(t_0)$．于是，只要$f(x)$的零点是孤立的，则$f(x(t))=0$在$t=t_0$附近就不变号．由式（6.34），$E'|_\Gamma$在$t=t_0$附近不变号，即$E|_\Gamma$在$t=t_0$处不取极值，这与假设相矛盾.

因此，必定是$f(x(t_0))=0$，但$y(t_0)=x'(t_0)\neq 0$.

第二步，应用式（6.33）将$E'|_\Gamma=-f(x)y^2$改写成

$$E'|_\Gamma = 2f(x)(G-E)$$

由此得到沿着Γ有等式

$$\frac{E'}{E-h}+2f=\frac{G-h}{E-h}(2f)$$

其中h是任意常数.

将上面的等式两端沿着Γ积分得到

$$\oint_{\Gamma} f dt = \oint_{\Gamma} \frac{G-h}{E-h} dt \tag{6.35}$$

因为γ_0与左端的积分反号，因此也与右端的积分反号.

设$E|_{\Gamma}$在$t=\bar{t}$处取到极小值. 若令$h=G(x(\bar{t}))$，则

$$h=G(x(\bar{t}))<G(x(\bar{t}))+\frac{y^2(\bar{t})}{2}\le E|_{\Gamma}$$

于是，式（6.35）右端的被积函数的分母$E-h$恒正.

第三步后，设函数f和g满足以下条件:

（1） $\alpha<0<\beta$， $f(x)=\begin{cases}<0 & \alpha<x<\beta \\ >0 & x<\alpha 或 x>\beta\end{cases}$;

（2）若$x\neq 0$，则$xg(x)>0$;

（3） $G(\alpha)=G(\beta)$， $G(x)=\int_0^x g(s)ds$.

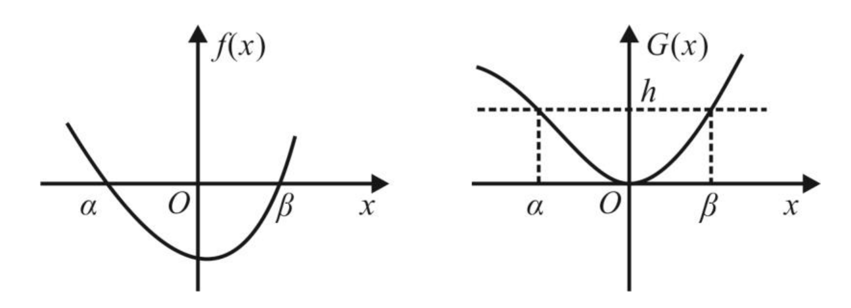


图 6.11 函数$f(x)$与$G(x)$的示意图.

由第一步知，使$E|_{\Gamma}$取最小的$\bar{t}$有$f(x(\bar{t}))=0$. 由条件（a）知，$x(\bar{t})=\alpha$或β. 在第二步中，令$h=G(x(\bar{t}))$，现由条件（c）得

$$h=G(\alpha)=G(\beta)$$

根据上面的讨论，函数 $f(x)$ 与 $G(x)$ 的图形如图 4.11 所示.

显然，$G-h$ 与 f 同号，从而式（6.35）右端积分为正，于是 $\gamma_0<0$．根据定理 6.10，系统（6.32）满足上述三个条件（1)、(2）和（3）时，若极限环存在，则稳定.

作为上面例子的特殊情形，考虑著名的 van der Pol 方程

$$x''-\mu\left(1-x^2\right)x'+x=0 \quad (\mu>0)$$

若极限环存在（它的存在性，可用定理 6.9 来证明．关于证明细节，请看参考文献[2]），则它是稳定的.

在更高维情形，有下面的一般性结论．记系统（6.20）的流为 Φ_t，那么，

定理 6.11（闭轨的稳定性定理） 设 Γ 是系统（6.20）的闭轨，记其周期为 T．若存在 $\boldsymbol{p}\in\Gamma$，使得线性映射 $D\Phi_T(\boldsymbol{p})$（即雅可比矩阵）有 $n-1$ 个特征值的绝对值小于 1，则 Γ 是渐近稳定的.

这一定理的证明也被省略了，参考文献[1]．当应用这一定理时，关键是能否找到满足定理条件的一个点．一般地，这一定理只具有理论意义，应用起来较困难.

注 6.1 若存在一个点 $\boldsymbol{p}\in\Gamma$ 使得 $D\Phi_T(\boldsymbol{p})$ 具有定理 6.11 中的性质，那么对任意的 $\boldsymbol{q}\in\Gamma$，$D\Phi_T(\boldsymbol{q})$ 也具有这种性质.

注 6.2 数 1 总是 $D\Phi_T(\boldsymbol{p})$ 的一个特征值.

6.3.2 弗洛盖理论简介*

在非线性方程的定态稳定性分析部分，主要考虑系统在定态邻近的线性化方程，并依据相应的雅可比矩阵的特征值实部的符号来决定定态的局部稳定性. 自然地，对极限环系统，类似地也可考虑系统在极限环处的线性化方程，相应线性系统的解的特性或结构和极限环的稳定性便是弗洛盖（Floquent）理论的主要内容.

考虑微分方程：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}\left(t+T\right)=\boldsymbol{A}(t)\in R^{n\times n}\text{或}\mathbb{C}^{n\times n},\quad T>0 \tag{6.36}$$

下面的弗洛盖定理完整地描述（6.36）的解的一般结构. 在介绍此定理之前，先介绍一个代数结果：

命题 6.4 若$\boldsymbol{C}$是$n\times n$阶矩阵且$\det(\boldsymbol{C})\neq 0$，那么存在矩阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{C}=e^{\boldsymbol{B}}$. 特别是，当$\boldsymbol{C}$为实矩阵时，存在实矩阵$\boldsymbol{D}$使得$\boldsymbol{D}^2=e^{\boldsymbol{B}}$.

证 如果$\boldsymbol{P}$是非奇异矩阵，并且存在矩阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{C}=e^{\boldsymbol{B}}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}}$. 因此，可假设$\boldsymbol{C}$是 Jordan 标准形，即$\boldsymbol{C}=diag\left(\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_n\right)$，$\boldsymbol{C}_j=\lambda_j\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}_j$，这里$\boldsymbol{I}$是单位矩阵，$\boldsymbol{R}_j=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，$\lambda_j$为矩阵$\boldsymbol{C}$的特征值（可能为复数）.

根据假设，每个$\lambda_j\neq 0, 1\leq j\leq p$. 为了证明此引理，只需说明每个$\boldsymbol{C}_j$，可以写成$\boldsymbol{C}_j=e^{\boldsymbol{B}_j}$的形式. 不失一般性，去掉下标而设$\boldsymbol{C}=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{R}$，这里$\lambda\neq 0$. $\boldsymbol{R}$具有

性质:对所有的$k \ge m$(m为某个整数),$\boldsymbol{R}^k = 0$. 由于$\lambda \ne 0$,因此$\boldsymbol{C} = \lambda(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{R}/\lambda)$.

令$\boldsymbol{B} = (\log\lambda)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S} = -\sum_{j=1}^{m}\frac{(-\boldsymbol{R})^j}{j\lambda^j}$,则$\boldsymbol{S}$是一个矩阵幂级数,它是对数函数

$\log(1+t)$在$t=0$附近的幂级数中用$\boldsymbol{R}/\lambda$代替t得到的. 由于$k \ge m$时,$\boldsymbol{R}^k = 0$,因此收敛性不成问题. 另一方面,可直接验证$\boldsymbol{C} = e^{\boldsymbol{B}}$. 在第一部分证明之后,第二部分的证明就容易了. ■

定理 6.12 (弗洛盖定理) 系统(6.36)的每个基本解矩阵$\boldsymbol{X}(t)$可表示为:

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{P}(t)e^{\boldsymbol{B}t} \tag{6.37}$$

这里$\boldsymbol{P}(t)$和$\boldsymbol{B}$是$n \times n$阶矩阵,对所有的t有$\boldsymbol{P}(t+T) = \boldsymbol{P}(t)$,而$\boldsymbol{B}$是常数矩阵.

证 若$\boldsymbol{X}(t)$是系统(6.36)的基本解矩阵,则由于$\boldsymbol{A}(t)$是周期的,$\boldsymbol{X}(t+T)$也是系统(6.36)的基本解矩阵. 因此,存在非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$使得:$\boldsymbol{X}(t+T) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$. 根据引理 6.1 知,存在矩阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{C} = e^{\boldsymbol{B}T}$. 令$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{X}(t)e^{-\boldsymbol{B}t}$,则易验证$\boldsymbol{P}(t)$是周期为$T$的矩阵函数. 定理证毕. ■

注 6.3 方程(6.36)的任意解是形如$e^{\lambda t}p(t)$的函数的线性组合,这里$p(t)$是周期为 T 的周期函数.

设$\boldsymbol{X}(t)$是系统(6.36)的基本解矩阵,$\boldsymbol{X}(t+T) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{C}$,则称非奇异矩阵$\boldsymbol{C}$为系统(4.36)的单值矩阵,它的特征值$\rho$称为系统(6.37)的**弗洛盖乘子**(**特征乘数**). 任何满足$\rho = e^{\lambda T}$的λ称为(6.36)的**特征指数**(或**弗洛盖指数**). 注意:弗洛盖乘子是唯一的,但弗洛盖指数不是唯一的(然而,

弗洛盖指数的实部是唯一的）．总可以取λ作为$\boldsymbol{B}$的特征值，这里的$\boldsymbol{B}$是任意使$\boldsymbol{C}=e^{\boldsymbol{B}T}$的矩阵. 换句话说，只要求出矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值，就可给出弗洛盖乘子.

推论 6.1 系统（6.36）可以变成常系数微分方程系统.

事实上，令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Y}$，那么$\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{P}'\right)\boldsymbol{Y}$. 由弗洛盖定理知：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{X}e^{-\boldsymbol{B}t}$，因此，$\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PB}$. 这样，获得常系数微分方程系统：$\boldsymbol{Y}'=\boldsymbol{BY}$.

关于弗洛盖乘子和特征值，我们有下列结果：

定理 6.13 若$\rho_j=e^{\lambda_j T}$（$1\le j\le n$）是系统（6.36）的弗洛盖乘子，那么

$$\prod_{j-1}^{n}\rho_j=\exp\left(\int_0^T tr\boldsymbol{A}(s)ds\right) \tag{6.38}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=\frac{1}{T}\int_0^T tr\boldsymbol{A}(s)ds\left(\mathrm{mod}\quad \frac{2\pi i}{T}\right) \tag{6.39}$$

这个定理的证明主要基于下列事实：对任意的线性系统，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$，若$\boldsymbol{X}(t)$是它的矩阵解，那么对任意的$t$和$t_0$，有：$\det\boldsymbol{X}(t)=[\det\boldsymbol{X}(t_0)]\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}(t)dt\right)$，以及$\boldsymbol{X}(T)=\boldsymbol{CX}(0)=\boldsymbol{C}$. 详细的证明留着读者作为习题. 下面，不加证明地引入下列定理.

定理 6.14 （1）系统（6.36）是一致稳定的必要且充分条件是系统（6.37）的弗洛盖乘子的模小于等于 1（或特征指数的实部小于等于零），且模为 1 的乘数有初等因子;（2）系统（6.36）是一致渐近稳定的必要且充分条件是（6.36）的弗洛盖乘子的模小于 1（或特征指数的实部小于零）. 如果是这

种情形，而 $\boldsymbol{X}(t)$ 是（6.36）的矩阵解，则存在常数 $K>0,\alpha>0$，使得

$$\left\|\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{-1}(s)\right\|\le Ke^{-\alpha(t-s)},\quad t\ge s \tag{6.40}$$

从上面的结果看出：线性周期方程组（6.36）似乎与常系数线性方程组有相似的性质，但并不完全如此. 这里，给出一个著名的反例.

例 6.16（Markus 与 Yamabe 反例[3]）:

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix} -1+\dfrac{3}{2}\cos^2 t & 1-\dfrac{3}{2}\cos t\sin t \\ -1-\dfrac{3}{2}\sin t\cos t & -1+\dfrac{3}{2}\sin^2 t \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

则 $\boldsymbol{A}(t)$ 的特征值为： $\lambda_1(t)=\left[-1+i\sqrt{7}\right]/4$， $\lambda_2(t)=\bar{\lambda}_1(t)$，特征值的实部是负的，且 $\boldsymbol{A}(t)$ 的周期为 π. 另一方面，可以直接验证 $\left(-\cos t,\sin t\right)\exp(t/2)$ 是方程（6.36）的解，此解当 $t\to\infty$ 时是无界的. 此外，并不困难地计算出方程（6.36）的弗洛盖乘子是 $e^{\pi/2}$（它对应这个特解），根据（6.41），我们知道弗洛盖乘子的积为 $e^{-\pi/2}$，因此，另一个弗洛盖乘子为 $e^{-\pi}$. 再根据定理 6.14，知道方程（6.36）的解是不稳定的.

习题 6.3

1. 证明定理 6.13.

2. 试确定下来方程组的极限环，并讨论其稳定性：

（1） $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y-x\left(x^2+y^2-2\right)^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\left(x^2+y^2-2\right)^2 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2-1\right) & \\ & x^2+y^2\neq 0 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x^2+y^2-1\right) & \\ \qquad\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dt}=0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-9\right)-y\left(x^2+y^2-4\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-9\right)+x\left(x^2+y^2-4\right) \end{cases}$

3. 试判别下来方程组有无极限环存在:

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y+\dfrac{1}{3}x^3-xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+x^2y+\dfrac{2}{3}y^3 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x+y-2xy^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=y+x^3-x^2y \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+y+x^3 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-y+y^3 \end{cases}$;

(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+y+x^2 \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-y+y^2 \end{cases}$ （提示：Dulac 判别法）.

4. 求下列系统的极限环，并根据极限环的特征指数讨论极限环的稳定性

（1）$\begin{cases} x' = \dfrac{y}{\sqrt{2}} + x\left(2x^2 + y^2 - 1\right) \\ y' = -\sqrt{2}x + y\left(2x^2 + y^2 - 1\right) \end{cases}$；

（2）$\begin{cases} x' = -y + x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 \\ y' = x + y\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^2 \end{cases}$

5. 对于平面 ODE 系统：

$$\begin{cases} x' = 2ax(xy - 1) \\ y' = 1 - x^2 y \end{cases}$$

其中 a 为参数，试证明：当 $a > 3/2$ 时，该系统在整个平面上无闭轨.

（**提示：** 先应用 Bendixson 定理，然后采用反证法证明右半平面无闭轨）

6. 试证明下列方程存在唯一稳定的极限环

（1）$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y - x^5 - 3x^2 y \end{cases}$

（2）$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \alpha\left(x^{2n} - \beta\right)\dfrac{dx}{dt} + \gamma x^{2m-1} = 0$，这里 α, β, γ 是正常数， m, n 为正整数.

参考文献

1. 张锦炎，冯贝页. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京：北京大学出版社，2000.

2. 王高雄，周之铭，朱思铭，王寿松. 常微分方程. 北京：高等教育出版社，2006.

3. Andre J. and Seibert P., “On after-endpoint motions of general discontinuous control systems and their stability properties,” Proc. 1st Intern. IFAC Congr.,

Moscow 1960, II, 919-922.

4. 张锁春．可激励系统分析的数学理论．北京：科学出版社，2009.
5. Wiggins S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
6. Lee J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, 2003.
7. Strogatz S.H., “From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators,” Physica D 143, 1-20(2000).
8. Lohmiller W. and Stoltins J.J.E., “On contract analysis for nonlinear systems,” Automatica 34, 6(1998).
9. Horn R.A. and Johnson C.R., Matrix analysis, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
10. Huang D.B., “Stabilizing near-nonhyperbolic chaotic systems with applications,” Phys. Rev. Lett. 93, 21:214101(2004).
11. Zhou T.S., Chen G.R., Lu Q.S. and Xiong X.H., “On estimates of Lyapunov exponents of synchronized coupled systems,” Chaos16, 033123(2006)
12. Earl M.G. and Strogatz S.H., “Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion,” Phys. Rev. E 67, 036204(2003).

第七章 分叉理论简介

前一章的定性理论并没有考虑系统参数的影响，本章介绍当系统参数改变时，相应的解会发生何种变化. 首先，通过例子介绍分叉（在某些书中又叫分岔、分支、分枝）的含义，进而给出分叉的定义；然后，介绍一种最常见的分叉类型：霍普夫（Hopf）分叉，并介绍霍普夫分叉定理；最后，简要介绍其它常见的分叉类型，并用例子加以说明。

§7.1 例子与定义

第六章介绍了常微分方程系统的定态、极限环的存在性与稳定性，那里的系统或没有参数或有参数但被固定. 一个自然的问题是当系统参数变动时，系统的定态或极限环是否仍存在？又会出现何种新的轨线行为？弄清这些问题对于了解系统的全局行为或系统轨线的全局结构是重要的，也是分岔理论的主要研究内容.

那么，什么是分岔？为理解起见，考察下列简单例子.

例 7.1 对于一阶非线性方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x;\mu)=\mu-x^2,\quad x\in R^1,\mu\in R^1 \tag{7.1}$$

显然,

$$f(0,0)=0\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

系统（7.1）的定态必须满足代数方程

$$\mu = x^2 \tag{7.2}$$

这在(μ, x)平面上表示一条抛物线，顶点在原点，开口向μ轴的正向．如图7.1所示，它表示系统（7.1）的**分岔图**，而相应的(μ, x)平面称为**相平面**.

若$\mu < 0$，则代数方程（7.2）无解，蕴含着方程（7.1）没有定态存在．若$\mu > 0$，则代数方程（7.2）有两个解$x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$，蕴含着方程（7.1）有两个定态存在．而当$\mu = 0$时，代数方程（7.2）只有一个解$x = 0$，蕴含着方程（7.1）只有一个定态存在.

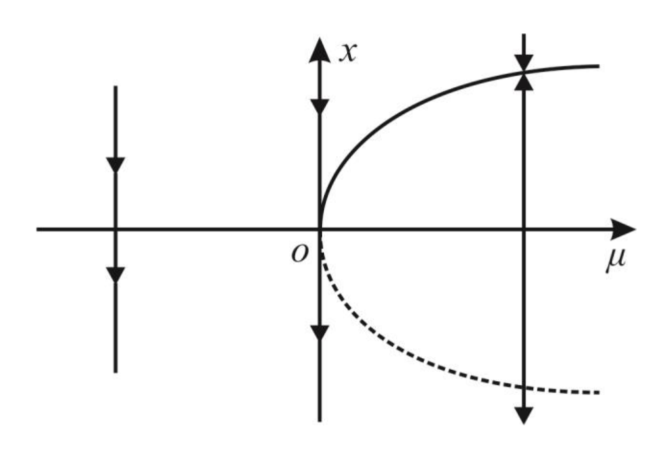


图 7.1 鞍结分岔示意图.

进一步，在两个定态存在的情形，定态$x_1 = \sqrt{\mu}$是稳定的（这是因为系统（7.1）的雅可比矩阵的特征值为$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) = -2\sqrt{\mu} < 0$），而定态$x_1 = -\sqrt{\mu}$是不稳定的（因为$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\mu, \sqrt{\mu}\right) = 2\sqrt{\mu} > 0$）．换句话说，系统（7.1）当$\mu < 0$时无平凡解，而当$\mu > 0$时有两个平凡解，其中一个稳定，另一个不稳定．因此，此系统在$\mu = 0$处产生了分岔．这种分岔称为**鞍结分岔**.

下面给出分岔的一般定义．考虑单参数的微分方程系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x};\mu\right),\ \ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^{n},\mu\in R^{1} \tag{7.3}$$

假定系统在 $\mu=\mu_0$ 处有一条特定性质的轨线，如定态 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 或更一般的轨线（记为 $\boldsymbol{x}_1(t;\mu_0)$）．若系统（7.3）在 $\mu=\mu_0$ 附近轨线的个数或性态发生变化，那么称向量场 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\mu)$ 的单参数族轨线 $\boldsymbol{x}(\mu)$ 在 $\mu=\mu_0$ 处经历（或产生）了**分岔**（或**分叉**），而 $\mu=\mu_0$ 称为**分岔点**．换句话说，分岔意味着系统在分岔点附近的轨线特性发生了变化，可能是由一个特定性质的解变成另一个特定性质的解，也可能是由原来稳定的解变成不稳定的解，并产生一个新的解，等等.

常微分方程的分岔理论非常丰富，然而，甚至对平面自治系统，相应的分岔理论仍在发展中．在高维情形，分岔类型非常复杂且有关理论体系仍不完善，目前仍是微分方程定性理论的重点研究对象.

这里，仅简单地介绍常微分方程的某些分岔理论，主要考虑的对象是自治微分方程系统，介绍的重点是霍普夫分岔理论，对于其它类型的系统（如高维系统）或其它更为复杂的分岔类型，仅对主要结果作简单介绍.

§7.2 霍普夫分叉简介

许多微分方程系统能够展示出周期（或极限环）振动，例如人的心脏跳动，生物节律等．那么，一个自然的问题是：这种周期运动是如何产生的或产生这些现象的机理是什么？霍普夫分岔（Hopf bifurcation）是微分方程

系统产生极限环的一种最常见的途径，也是一种最常见的分岔类型.

为清楚起见，让我们考察一个例子：

例 7.2 对于平面常微分方程系统

$$\begin{cases} x' = \mu x - y - x\left(x^2 + y^2\right) \\ y' = x + \mu y - y\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

通过变换 $x = r\cos\varphi$， $y = r\sin\varphi$ 变成

$$\begin{cases} r' = r\left(\mu - r^2\right) \\ \varphi' = 0 \end{cases}$$

对于 r 的方程（要求 $r \ge 0$），它存在一维叉式分岔. 注意到：原点是系统的定态，且相应的雅可比矩阵为 $\begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$，特征值为 $\lambda_{\pm} = \mu \pm \sqrt{-1}$. 因此，在 Oxy 相平面上，若 $\mu \le 0$，则原点是稳定的焦点；若 $\mu > 0$，则原点变为不稳定的焦点，同时存在稳定的极限环 $x^2 + y^2 = \mu$，或 $r = \sqrt{\mu}$（根据第六章的内容可判断此极限环是稳定的）. 因此， $\mu = 0$ 是分岔点，相应的分岔称为霍普夫分岔.

关于霍普夫分岔，先不加证明地给出平面系统的结论 [1].

定理 7.1（霍普夫分岔定理：二维情形）考虑二维常微分方程系统：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}\right),\ \ \boldsymbol{x} \in W \subset R^2 \qquad (7.4)$$

这里 W 是一个开集，参数 $\boldsymbol{p} \in U\left(\boldsymbol{p}_0\right)$（一个邻域）. 即 $\tilde{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{p}_0\right)$ 为系统的定态. 若下列两个条：

（1）在平面上的点 $\left(\tilde{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{p}_0\right), \boldsymbol{p}_0\right)$ 的某个邻域 V 内，函数 $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{p}\right)$ 对 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 均是解

析的；

（2）雅可比矩阵 $A(\boldsymbol{p}_0)=D_x\boldsymbol{f}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}_0);\boldsymbol{p}_0\right)$ 有一对共轭复根 $\lambda,\bar{\lambda}$（其实部为 $\alpha(\boldsymbol{p})$，虚部为 $\omega(\boldsymbol{p}_0)$），且具有性质：$\omega(\boldsymbol{p}_0)=\omega_0>0$，$\alpha(\boldsymbol{p}_0)=0$，$\alpha'(\boldsymbol{p}_0)\neq 0$；

满足，则当 $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0|$ 充分小时，系统（7.4）至少存在一个闭轨（极限环）Γ.

为帮助读者理解上述定理，这里给出一个例子.

例 7.3 考虑布鲁塞尔振子的数学模型

$$\begin{cases} x'=\mu-(a+1)x+x^2y \\ y'=ax-x^2y \end{cases}$$

这里 $a>0$ 和 $\mu>0$ 是系统参数，即 $\boldsymbol{p}=(a,\mu)$. 不难显示出此系统有唯一定态 $(\tilde{x},\tilde{y})=(\mu,a/\mu)$，且在定态处的线性化方程为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-1 & \mu^2 \\ -a & -\mu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

因此，雅可比矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a-1 & \mu^2 \\ -a & -\mu^2 \end{bmatrix}$，其特征方程为

$$\lambda^2+\left(1+\mu^2-a\right)\lambda+\mu^2=0$$

相应的特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{a-1-\mu^2\pm\sqrt{\left(1+\mu^2-a\right)^2-4\mu^2}}{2}=\frac{a-1-\mu^2\pm\sqrt{\left[(1-\mu)^2-a\right]\left[(1+\mu)^2-a\right]}}{2}$$

进一步，不难显示出：

（1）当 $a\le(1-\mu)^2$ 或 $a\ge(1+\mu)^2$ 时，两个特征值都是实的；而且，当 $a\le(1-\mu)^2$

时，两个实特征值是负的，因此定态是稳定的；当$a \ge (1+\mu)^2$时，两个实特征值是正的，因此定态是不稳定的；

（2）当$(1-\mu)^2 < a < (1+\mu)^2$时，两个特征值是复的．当$(1-\mu)^2 < a < 1+\mu^2$时，两个复特征值的实部都是负的，因此定态是稳定的；当$1+\mu^2 < a < (1+\mu)^2$时，两个复特征值的实部都是正的，因此定态是不稳定的．

总之，当$a < 1+\mu^2$时，定态是稳定的；当$a > 1+\mu^2$时，定态是不稳定的；当$a = 1+\mu^2$时，两个特征值变成$\lambda_{1,2} = \pm \mu i$，其中$i = \sqrt{-1}$为虚数单位．因此，当$a = 1+\mu^2$时，系统产生了霍普夫分叉，分叉出一个极限环，且它的存在范围只可能为$a > 1+\mu^2$．注意到：$\boldsymbol{p}_0 = (a, \mu)$，其中$a, \mu$满足条件：$a = 1+\mu^2$．

其次，不加证明地给出下列一般性结论．关于定理的证明，有兴趣的读者可参考文献[1].

定理 7.2（霍普夫分岔定理：一般情形）考虑n维常微分方程系统：

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p}),\ \boldsymbol{x} \in W \subset R^n,\ \boldsymbol{p} \in U(\boldsymbol{p}_0) \subset R^m \tag{7.6}$$

（这里W是开集，$U(\boldsymbol{p}_0)$代表$\boldsymbol{p}_0$的某个邻域），它满足下列条件：

（3）系统有平衡点，记为$\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p})$，即$\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}); \boldsymbol{p}) \equiv 0$成立；

（4）在$(\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}_0), \boldsymbol{p}_0)$的领域$V$内，函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{p})$对$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{p}$均是解析的；

（5）矩阵 $A(\boldsymbol{p}_0) \equiv D_x \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{p}_0); \boldsymbol{p})$ 有一双共轭复根 $\lambda, \bar{\lambda}$，且若 $\lambda(\boldsymbol{p}) = \alpha(\boldsymbol{p}) + i\omega(\boldsymbol{p})$（这里$i = \sqrt{-1}$），则要求$\omega(\boldsymbol{p}_0) = \omega_0 > 0$，$\alpha(\boldsymbol{p}_0) = 0$，$\alpha'(\boldsymbol{p}_0) \ne 0$；

（6） $A(\boldsymbol{p}_0)$的其余$n-2$个特征值都有负实部.

则当$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0|$充分小时，系统（7.6）至少存在一个闭轨（极限环）Γ.

下一步，我们指出：霍普夫分岔又分为超临界霍普夫分岔和次临界霍普夫分岔．为了理解这两种类型的霍普夫分岔，这里各举一个例子来说明之.

例 7.4 （**超临界霍普夫分岔**）考虑下列平面自治系统的微分方程：

$$\begin{cases} x' = \mu x - y - 2x\left(x^2+y^2\right) \\ y' = x + \mu y - 2y\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \tag{7.7}$$

这里μ为系统的参数，显然$(0,0)$为系统的唯一定态．在极坐标下，方程（7.7）变成

$$r' = r\left(\mu - 2r^2\right),\ \ \omega' = 1 \tag{7.8}$$

若$\mu<0$,则定态$(0,0)$是稳定的;若$\mu>0$,则系统有一个稳定的极限环$r=\sqrt{\mu/2}$或$x^2+y^2=\mu/2$，但定态已变得不稳定，因此$\mu=0$为分岔点．这种分岔称为超临界霍普夫分岔，如图 7.2 的左图所示.

例 7.5 （**次临界霍普夫分岔**）考虑下列平面自治系统的微分方程：

$$\begin{cases} x' = \mu x - y + x\left(x^2+y^2\right) \\ y' = x + \mu y + y\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \tag{7.9}$$

这里μ为系统的参数,显然$(0,0)$为系统的唯一定态．在极坐标下,方程（7.9）变成

$$r' = r\left(\mu + r^2\right),\ \ \omega' = 1 \tag{7.10}$$

若 $\mu<0$，则定态 $(0,0)$ 是局部稳定的，且被系统的不稳定极限环 $r=\sqrt{-\mu}$ 或 $x^2+y^2=-\mu$ 所包围；若 $\mu>0$，则系统的定态是不稳定的，但系统原来不稳定的极限环消失，因此 $\mu=0$ 为分岔点．这种分岔称为次临界霍普夫分岔，如图 7.2 的右图所示.

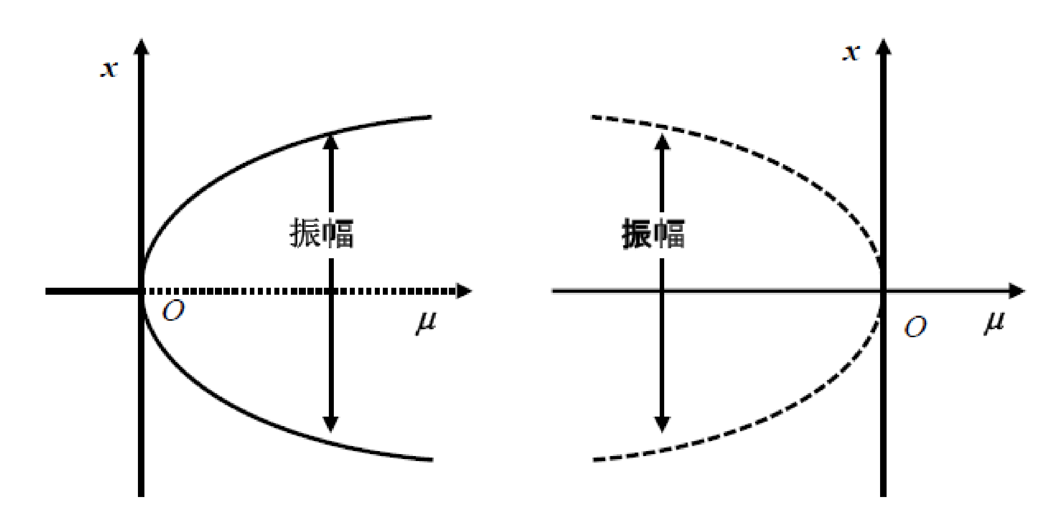


图 7.2 霍普夫分岔，左图：超临界霍普夫分岔；右图：次临界霍普夫分岔.

在本小节的最后，考虑一个综合分析的例子.

例 7.6 对于下列常微分方程系统：

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{dx}{dt}=x-\dfrac{x^3}{3}-y \\ \dfrac{dy}{dt}=x+a \end{cases} \tag{7.11}$$

其中 a 是参数；$\varepsilon>0$ 是常数，

(1) 试证：当 $|a|<1$ 时，系统有一个经霍普夫分叉产生的极限环；

(2) 若 $0<\varepsilon<<1$，试估计出当 $|a|<1$ 时极限环的周期表达，并求 $a\to1^-$ 的周期；

(3) 对于$0<\varepsilon<<1$, 若$|a|<1$但接近于 1, 试画出极限环轨迹的示意相图(包括轨线的方向)，并标出主要位置点的坐标.

容易求得系统的唯一静态为：$\tilde{x}=-a,\ \tilde{y}=-a+\frac{1}{3}a^3$. 在此静态处作线性化方程，得雅可比矩阵：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\varepsilon}\left(1-a^2\right) & -\frac{1}{\varepsilon}\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

进一步，可求矩阵$\boldsymbol{J}$的特征值为：

$$\gamma_{\pm}=\frac{1-a^2\pm\sqrt{\left(a^2-1\right)^2-4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

由此，知道：

(1) 若$|a|>1$，则对任意的$\varepsilon>0$，知$\gamma_{\pm}$的实部都小于零. 又因为系统是二维的，所以

系统的唯一吸引子是不动点.

(2) 若$|a|=1$，则$\gamma_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{-1}$. 故系统在$|a|=1$处，产生了霍普夫分岔. 根据霍普夫

分岔定理，我们知道：当$|a|<1$时，系统（7.11）有一个极限环. 由于正参数ε一般地很小，因此这种极限环系统也叫做**松弛振子**.

松弛振子具有很多特性. 事实上，当$|a|<1$时，由于$0<\varepsilon<<1$，因此，系统（7.11）的x是快变量（因为它的导数很大），相对地，y是慢变量，这样，

极限环上的运动能够看出是由快和慢运动构成. 我们定义 S_L 为 x 零倾线（它由 $y = x-(1/3)x^3$ 确定，并有三个分枝，即构成 S 型曲线）的左边分枝，它定义在 $(-\infty,-1)$ 上，即:

$$S_L = \left\{(x,y): y = x - \frac{1}{3}x^3,\ -\infty < x < -1\right\};$$

而 S_R 是定义在 $(1,\infty)$ 上的 x 零倾线的右边分枝，即:

$$S_R = \left\{(x,y): y = x - \frac{1}{3}x^3,\ 1 < x < +\infty\right\}.$$

在慢运动（时间尺度为 $O(1)$ ）期间，由于 $y = x - x^3/3$，因此 $y' = \left(1-x^2\right)x' = x + a$. 这样, 慢运动的轨迹由: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x+a}{1-x^2},\ y = x - \dfrac{1}{3}x^3$ 决定. 当轨迹达到 S_L 和 S_R 间的膝（knee）, 即处在点 $(-1,-2/3)$ 或 $(1,2/3)$（它们是奇异点）, 轨线从 S_L 运动到 S_R 并往返, 且伴随一个突然的跳跃（时间尺度为 $O(\varepsilon)$ ）: $\varepsilon\dfrac{dx}{dt} = x - \dfrac{1}{3}x^3 - y, y = \pm\dfrac{2}{3}$, 参考图 7.3.

因为轨迹的大部分时间花在慢运动上，因此极限环的周期可近似为:

$$T_{LC}(a) \approx \int_{-2}^{-1}\frac{1-x^2}{x+a}dx + \int_{2}^{1}\frac{1-x^2}{x+a}dx = 3 - \left(1-a^2\right)\ln\left(\frac{4-a^2}{1-a^2}\right).$$

特别是，当 $\varepsilon \to 0$，且 a 接近于霍普夫分叉点时，我们有:

$$\lim_{a\to 1^-} T_{LC}(a) = 3.$$

对于 $0 < \varepsilon << 1$, 若 $|a| < 1$ 但接近于 1, 则系统的极限环轨迹和方向如图 7.3 所示，图中标出了主要位置点的坐标.

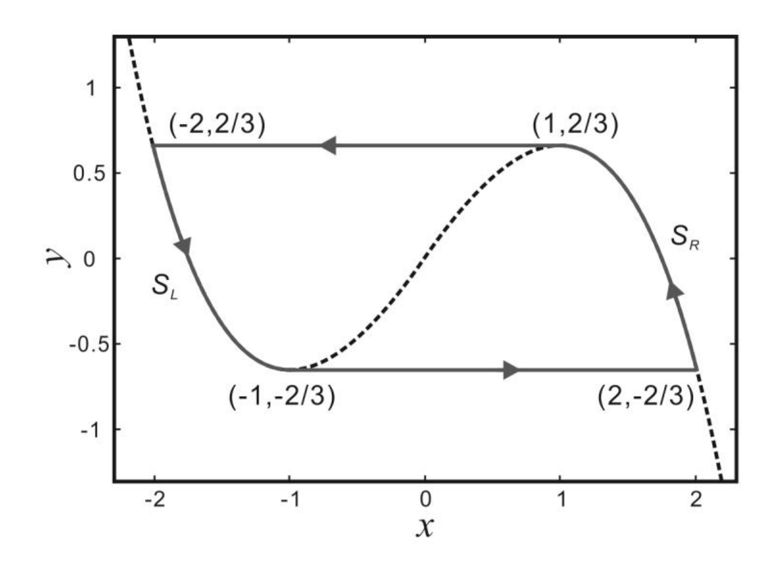


图 7.3 松弛振子的轨线特征.

习题 7.2

1. 考虑下列微分方程:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - y \\ x + y - xy \end{bmatrix}$$

的定态$(0,0)$，其中a是系统参数，试问在什么情况下，系统产生霍普夫分岔.

2. 试研究下列系统

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = (c - a)x - xz + y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

所有定态的稳定性，并讨论何时产生霍普夫分岔，这里$a > 0$、$b > 0$和$c > 0$是系统的三个参数.

3. 试给出 Rossler 系统

$$\begin{cases} x' = -(y+z) \\ y' = x + ay \\ z' = z(x-c) + b \end{cases}$$

在其定态处产生霍普夫分叉的条件，并用数值模拟加以证实，这里 $a>0$，$b>0$ 和 $c>0$ 是系统的参数.

4. 考虑二维系统标准型的复数形式:

$$\frac{dz}{dt} = -i\omega_0 z + zF(z)$$

其中 $z = x + iy$，$i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，ω_0 为系统的固有频率，$F(z)$ 为非线性函数。记 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$。

（1）若 $F(z) = F_1(r) = a_1 - r^2$，试证明：当 $a_1 > 0$ 时，该系统有一极限环存在;

（2）若 $F(z) = F_2(r) = a_2 + r^2 - r^4$，试证明：该系统关于参数 a_2 通过鞍-结分叉能够产生一个极限环;

5. 对于平面系统: $\begin{cases} x' = -ax + y(b - x^2 - y^2) \\ y' = -ay - x(b - x^2 - y^2) \end{cases}$，其中 a 和 $b>0$ 为系统参数,

（1）试证明：当 $a>0$ 时，该系统通过 Hopf 分叉产生一个极限环;

（2）证明此极限环是局部稳定的。

§7.3　其它类型的分叉

这里，简单地介绍其它几种类型的分岔. 更多的细节，请读者看列出的参考文献，或通过互联网用谷歌（google）搜索相关内容.

（1）鞍结分岔（saddle-node）

鞍结分岔也称为折叠（fold）或转向．当系统参数变动时，两个不动点能彼此靠近，进而消失．对动力系统（7.3）假设它有不动点$\bar{\boldsymbol{x}}(\mu)$，那么当参数$\mu$改变时，要使系统在此不动点产生鞍结分岔，下列条件必须满足：雅可比$D_x \boldsymbol{f}\left(\bar{\boldsymbol{x}}(\mu);\mu\right)$必须有一个零特征值，而其余的特征值均具有非零的实部．如一维系统产生鞍结分岔的典型方程为：$x' = \mu + x^2$．当$\mu < 0$时，系统有两个不动点（定态），其中一个稳定，另一个不稳定．因此，系统在$(x;\mu) = (0,0)$处产生鞍结分岔，参考图 7.1.

（2）**跨临界**（cross critical）**分岔**

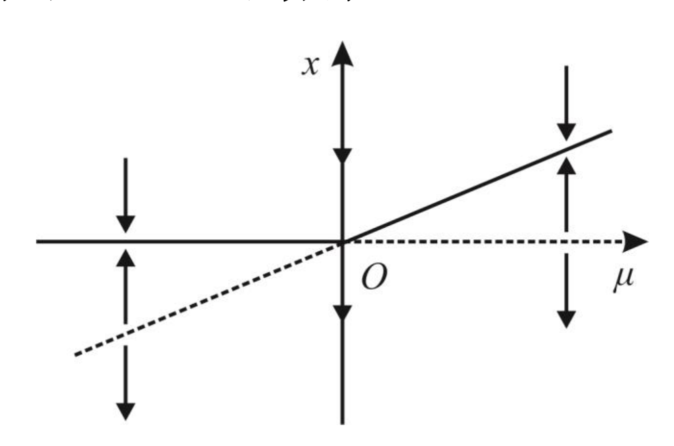


图 7.4 跨临界分岔示意图.

例 7.7 考虑一维微分方程

$$x' = \mu x - x^2 \tag{7.12}$$

此系统可能的定态为：$x_1 = 0$和$x_2 = \mu$．若$\mu \neq 0$，则系统有两个平衡点，它们的稳定性依赖于μ的符号，即若$\mu > 0$，则$x_1 = 0$是不稳定的而$x_2 = \mu$是稳定的，

反之，若 $\mu<0$，则 $x_1=0$ 是稳定的而 $x_2=\mu$ 是不稳定的；若 $\mu=0$，则系统有一个半稳定的平衡点 $x_1=0$. 因此，$\mu=0$ 是系统（7.12）的分岔点，这种分岔称为跨临界分岔，如图 7.4 所示.

（3）**叉式（bifold）分岔**

例 7.8 考虑一维微分方程

$$x'=\mu x-x^3 \tag{7.13}$$

此系统可能的平衡点为 $x_1=0$ 和 $x_{2,3}=\pm\sqrt{\mu}$. 若 $\mu>0$，则系统有两个稳定的平衡点 $x_{2,3}=\pm\sqrt{\mu}$ 和一个不稳定的平衡点 $x_1=0$；若 $\mu\le 0$，则系统只有一个稳定的平衡点 $x=0$.因此，系统在 $\mu=0$ 处发生了分岔，这种分岔称为跨临界分岔，如图 7.5 所示.

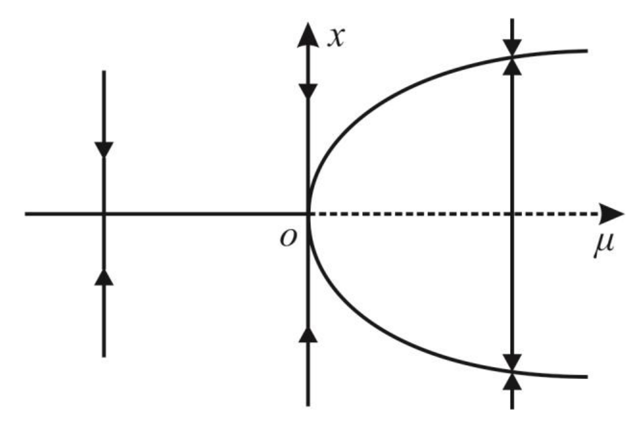


图 7.5 叉式分岔示意图.

（4）**循环折叠**（cyclic fold）**分岔**

循环折叠分岔又称为周期轨的鞍结分岔，即在鞍结分岔中用周期轨或极限环代替不动点. 一个稳定的周期轨与不稳定的周期轨共存，两者在分岔点处消失但一个新的极限环出现.

例 7.9 考虑平面自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x\left[\mu+x^2+y^2-\left(x^2+y^2\right)^2\right]\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y\left[\mu+x^2+y^2-\left(x^2+y^2\right)^2\right]\end{cases} \tag{7.14}$$

这里a是系统的参数．不难看出对于所有的μ，$(x,y)=(0,0)$系统（7.14）的唯一定态．引进极坐标变换$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（非奇异变换），则此方程变成（或等价于）

$$\begin{cases}r'=r\left(\mu+r^2-r^4\right)\\ \theta'=-1\end{cases} \tag{7.15}$$

若$\mu\geq 0$，则系统仅有一个极限环：$r^2=\left(1+\sqrt{\Delta}\right)/2$，这里$\Delta=1+4\mu$．不难看出这个极限环是由 Hopf 分岔产生的；若$\mu<-1/4$，则由于$\dot{r}$恒大于零，因此系统无极限环；若$-1/4<\mu<0$，则可以证明，系统有两个极限环，分别是$r^2=\left(1-\sqrt{\Delta}\right)/2$和$r^2=\left(1+\sqrt{\Delta}\right)/2$，其中一个是稳定的，另一个是不稳定的；特别是，当$\mu=-1/4$时，这两个极限环合二为一，此时系统有唯一稳定的极限$r^2=1/2$．因此，在$\mu=-1/4$处，系统通过鞍结分岔产生了一个极限环，即周期轨的鞍结分岔．

（5）同宿（homoclinic）**分岔**

同宿分岔又称为鞍点圈（saddle-loop）分岔．当极限环的周期变成无限大时，终端点连接一族极限环.

例 7.10 考虑平面自治系统：

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=x-x^2+\mu y\end{cases} \tag{7.16}$$

此方程有两个平衡点$(0,0)$和$(1+\mu,0)$．若$\mu=0$，则$(0,0)$为鞍点，$(1+\mu,0)$为中心，系统出现同宿轨（环）；若$\mu\neq 0$，则$(0,0)$仍为鞍点，而$(1+\mu,0)$变为焦点，且当$\mu<0$时，焦点是稳定的，而当$\mu>0$时，焦点是不稳定的．因

此，$\mu=0$ 为分岔点的．这种分岔称为**同宿分岔**，如图 7.6 所示．

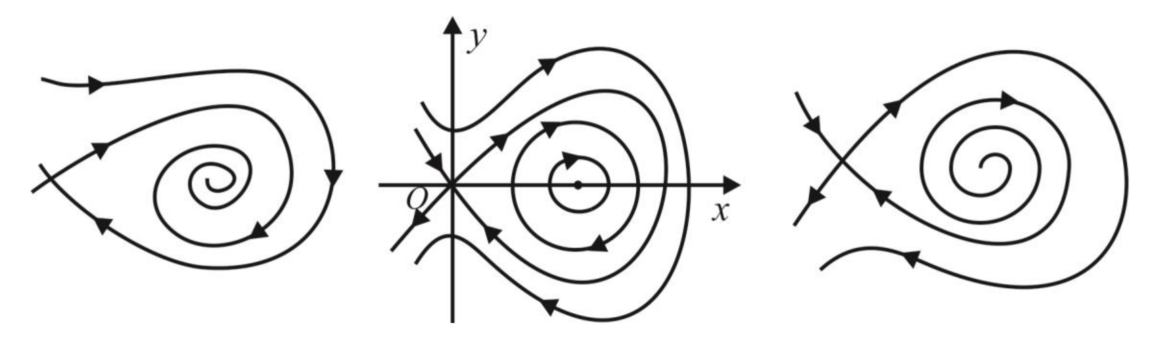


图 7.6 同宿分岔示意图．

（7）异宿（heteroclinic）分岔

例 7.11 考虑平面自治系统

$$\begin{cases} x' = \mu + x^2 - xy \\ y' = -x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \tag{7.17}$$

若 $\mu=0$，则系统有两个平衡点 $(0,\pm1)$，均为鞍点，且存在连接鞍点的分界线（异宿轨）；若 $\mu\neq0$，在相平面上点 $(0,\pm1)$ 附近系统仍有两个鞍点型的平衡点，但异宿轨破裂，而且对于 $\mu>0$ 和 $\mu<0$ 形成两种不同的轨线图貌，参考图 7.7．因此，分岔点是 $\mu=0$，这种分岔称为异宿分岔．

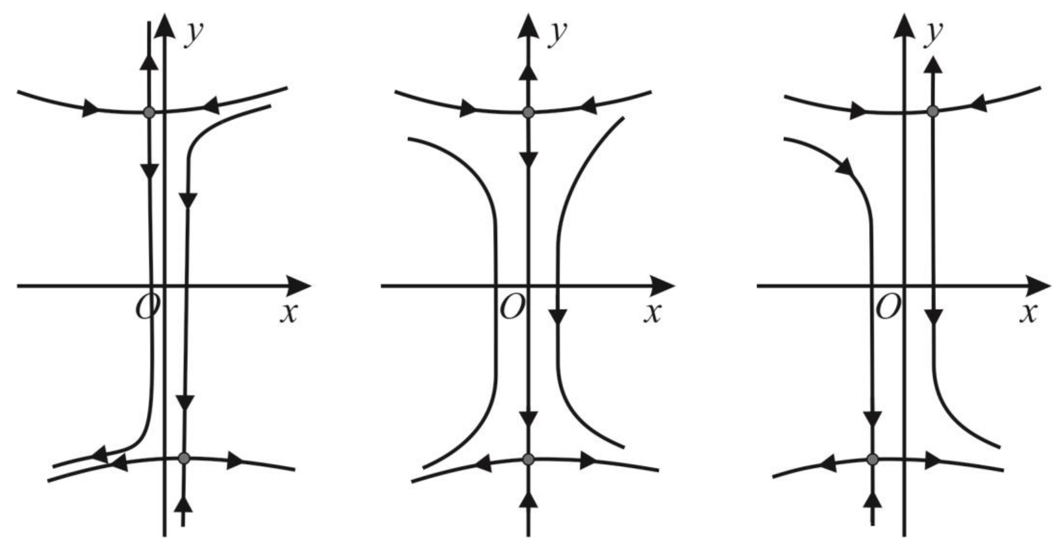


图 7.7 异宿分岔示意图．

（8）尖点（cusp）分岔

在尖点分岔处，系统的三个平衡点合并成一个平衡点. 对于尖点，一维情形的典型方程为:

$$x' = \alpha - \beta x - x^3 \tag{7.18}$$

产生尖点分岔的条件是:

（1）不动点的雅可比矩阵具有一个零特征值;

（2）在对应于零特征值的特征向量方向上，向量场的二阶导数为零.

（9）退化的霍普夫分岔

退化的霍普夫分岔系统的规范型在极坐标下仅含奇次项. 余维数为 2 的退化霍普夫分岔又称为 Bautin 分岔，其标准型为:

$$\begin{cases} r' = \alpha r + \beta r^3 - r^5 \\ \theta' = 1 \end{cases} \tag{7.19}$$

（10）Taken-Bogdanov 分岔

在 Taken-Bogdanov 分枝上，有一条鞍点-圈曲线和一条霍普夫分枝曲线坍塌形成一条鞍结分枝曲线. 对于 Taken-Bogdanov 分岔，标准型为:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \alpha + \beta x + x^2 + xy \end{cases} \tag{7.20}$$

Taken-Bogdanov 分岔即为双重零分岔，雅可比的迹等于零，而且有双重零特征值.

还有中性鞍点-圈分岔、鞍-结-圈分岔，等等，就不一一介绍了. 有兴趣的读者，可参考文献[4].

最后，我们指出，分岔与混沌（一种特殊的动力行为. 简单地讲，初值的微小变化，会引起系统轨线的巨大变化，而且轨线的行为是不可预测的）

有着密切的关系，有兴趣的读者，可参考文献[1].

习题 7.3

1. 试求下列参数方程的分岔值:

（1） $x' = \mu + 2x + x^2$;

（2） $x' = 1 + 2\mu x + x^2$;

（3） $x' = x - 3\mu x^2 + x^4$

2. 求下列二阶方程产生分岔的参数值，并画图验证之（令 $x' = y$）:

（1） $x'' + \left(x^2 - \mu\right)x' + x = 0$;

（2） $x'' + \left(x - 1\right)x' + \mu x = 0$;

（3） $x'' + x' + x^2 - \mu = 0$

参考文献

13. Wiggins S., *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.

14. 张锦炎，冯贝页. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社，2000.

15. 王高雄，周之铭，朱思铭，王寿松. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社，2006.